

ÁLGEBRA DE BOOLE Y COMPUERTAS LÓGICAS

En el análisis y diseño de los sistemas digitales se utilizan dos campos del álgebra moderna llamados “cálculo de las proposiciones” y “álgebra de conjuntos”, ambos se basan en el álgebra creada en 1854 por el matemático inglés George Boole.

El álgebra de Boole fue adaptada y usada en un principio como fundamento en el diseño de circuitos eléctricos de conmutación con relés por E. Shannon del M.I.T. En 1938 Shannon demostró que un álgebra de Boole, que denominó álgebra de conmutación, podía representar las propiedades de los circuitos de conmutación biestables.

El álgebra creada por George Boole y adaptada por E. Shannon es la herramienta básica para el análisis y diseño de circuitos binarios o de dos estados. Estos circuitos son denominados circuitos lógicos, de conmutación o circuitos combinacionales y son representados por símbolos estándar, los cuales se basan en las llamadas compuertas lógicas que no son más que la representación de las operaciones o funciones básicas del álgebra de Boole.

2.1 ÁLGEBRA DE BOOLE

Existe una diversidad de formas o tipos de álgebras de Boole dependiendo de los principios o postulados. El álgebra de Boole es un sistema de operaciones lógicas (no aritméticas) entre variables binarias. En realidad la definición de los valores que pueden asumir los elementos o variables en la llamada álgebra “booleana” solo se restringe a la existencia de dos valores, pudiendo ser denotados por cualquier letra o símbolo; no obstante, se prefiere utilizar los valores 0 y 1 para asociarlos con el sistema numérico binario y facilitar el estudio. Esto se verá más claro en las secciones que se refieren a minitérminos y mapas de Karnaugh.

2.2 ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN

La definición formal del álgebra “booleana” o álgebra de conmutación que se utilizará en este texto está sustentada en los postulados planteados por E. Huntington y M.H. Stone.

2.2.1 DEFINICIÓN

Es un sistema contentivo de un conjunto N de dos o más elementos o variables y de dos operadores denominados operación OR ($+$) o suma lógica y operación AND (\bullet) o producto lógico; tal que si X e Y pertenecen a N , entonces $(X \bullet Y)$ y $(X + Y)$ también pertenecen al conjunto N .

Variables o elementos

Las variables usadas en las ecuaciones o expresiones en el álgebra solo pueden asumir uno de dos posibles valores.

$$X = 0 \text{ si } X \neq 1$$

$$X = 1 \text{ si } X \neq 0$$

Se han escogido los valores uno (1) y cero (0) por su relación con el sistema numérico binario, esto permitirá una mejor asociación en los análisis y diseño de circuitos.

Operadores Lógicos

□ **Suma lógica**

Existe cuando se coloca el símbolo (+) entre dos variables booleanas como en la expresión $Z = X + Y$. Debido a que ambas variables X e Y solo toman el valor de 0 ó 1, se puede definir la suma lógica mostrando todas las posibles combinaciones.

La suma lógica queda definida así:

X	Y	$Z = X + Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La ecuación $Z = X + Y$ puede leerse de varias maneras, Z igual a X o Y , Z igual a X or Y ., Z igual a X más Y . Todas significan que Z será igual a 1 si una de las variables X o Y es de valor 1.

□ Producto lógico.

Las reglas del producto lógico representado por el símbolo (\bullet) pueden exponerse a través de un listado de todos los posibles valores:

X	Y	$Z = X \bullet Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La ecuación $Z = X \bullet Y$ puede también leerse de varias maneras, Z igual a X y Y; Z igual a X and Y, Z igual a X por Y. Todas significan que Z será igual a 1 si y solo si ambas variables X, Y son 1 o que Z será igual a cero si al menos una de las variables X o Y es cero. Generalmente el símbolo del producto (\bullet) se omite por cuanto las variables booleanas se representan por una única letra o entre paréntesis.

Axiomas

A continuación se presentan los axiomas o principios que conforman el álgebra de conmutación.

- Ley conmutativa.

$$X + Y = Y + X, \quad X \bullet Y = Y \bullet X$$

- Ley distributiva.

$$X + (Y \bullet Z) = (X + Y) \bullet (X + Z), \quad X \bullet (Y + Z) = (X \bullet Y) + (X \bullet Z)$$

- Ley de identidad.

Existe el elemento neutro en la suma denominado cero (0), y para el producto llamado uno (1) tal que para todo X perteneciente a N se tiene:

$$X + 0 = X, \quad X \bullet 1 = X$$

- Leyes de complementación.

Para todo elemento o variable, existe otro elemento denominado complemento. El complemento, algunas veces llamado negación, de una variable X puede ser representado utilizando un apóstrofe X' , X' o una barra \overline{X} . El complemento de una variable X es tal que:

$$X \bullet X' = 0, \quad X + X' = 1$$

2.2.2 PROPIEDADES

Se presentan a continuación los teoremas o propiedades más importantes que se utilizan en la simplificación de expresiones o ecuaciones en álgebra de conmutación. Estas propiedades o definiciones se derivan de los postulados del álgebra.

Idempotencia

Esta importante propiedad establece que para cualquier elemento X del álgebra se verifica que:

$$X + X = X, \quad X \bullet X = X$$

Involución

$$(X')' = X$$

Elementos de nulidad

$$X + 1 = 1, \quad X \bullet 0 = 0$$

Teoremas de De Morgan

Este teorema relaciona las operaciones básicas AND y OR y como se verá es útil en la obtención de las llamadas expresiones duales.

$$\overline{(X \bullet Y \bullet Z)} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

$$\overline{(X + Y + Z)} = \overline{X} \bullet \overline{Y} \bullet \overline{Z}$$

Principio de dualidad

El “dual” de un enunciado o ecuación en un álgebra de conmutación es aquella ecuación que resulte de intercambiar las operaciones suma y producto, y los elementos 1 y 0 en la ecuación original.

Cada uno de los axiomas expuestos están definidos por pares de ecuaciones los cuales son el dual uno del otro.

La importancia de este principio radica en que es necesario probar solo una de las afirmaciones o de las ecuaciones puesto que el principio de dualidad prueba el otro.

2.3 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

Los circuitos de conmutación pueden ser descritos a través de funciones en álgebra de conmutación, también llamadas funciones lógicas.

Sea F una variable binaria que depende de los valores de X e Y , siendo X e Y variables binarias independientes de F .

Entonces, se dice que F es una función lógica de X e Y si:

$$F = f(X, Y)$$

Donde $f(X, Y)$ es una expresión en álgebra de Boole para las variables X e Y .

La función F se representa:

$$F(X, Y) = f(X, Y)$$

Las funciones lógicas pueden ser visualizadas o representadas de varias maneras. Las formas más usuales son la tabla de la verdad, las compuertas lógicas, los diagramas de tiempo y las diversas formas algebraicas. A continuación se presentarán las más importantes.

2.3.1 FORMAS ALGEBRAICAS

Para las expresiones en álgebra de Boole se han establecido formas y definiciones especiales que son un estándar en el lenguaje y la literatura técnica.

Definiciones

Un literal es definido como la variable o su complemento en una expresión. Por ejemplo en la expresión $XY' + X'Z$, tenemos que X , Y' , X' y Z son literales.

Un término producto está formado por dos o más literales combinados por productos lógicos, tal como $X'YZ'$ o $A'B'C$.

Un término suma o alternativo es aquel formado por dos o más literales combinados por sumas lógicas, tal como $X' + Y + Z'$ o $A' + B + C$.

Aplicando el concepto de idempotencia una única variable puede ser calificada como un término producto o un término suma.

Formas suma de productos y producto de sumas

Las funciones “booleanas” pueden ser expresadas por la suma lógica (OR) de términos productos (AND) de las variables. Esta forma de expresión es denominada suma de productos.

Ejemplo de términos productos son:

Para las variables x, y, z : $x \cdot y', xyz'$.

Para las variables a, b, c, d : $a \cdot c', c' \cdot d, a \cdot b' \cdot c \cdot d$,

Las funciones “booleanas” también pueden ser expresadas como el producto lógico (AND) de términos sumas (OR). Esta forma de expresión es denominada producto de sumas.

Ejemplo de términos sumas son:

Para las variables x, y, z : $(x + y'), (x + y + z')$.

Para las variables a, b, c, d : $(a + c)', (c' + d), (a + b' + c + d)$,

Por tanto una función puede ser expresada en suma de productos (S.P) o productos de suma (P.S) tal como se muestra a continuación:

$$F1(x, y) = (x + y') \cdot (y') \quad (\text{P.S})$$

$$F2(x, y) = (x' \cdot y') + (x' \cdot y) \quad (\text{P.S})$$

$$F2(x, y) = x' y' + x' y \quad (\text{S.P})$$

2.3.2 TABLA DE LA VERDAD

Dada una función $F(X, Y)$, la tabla de la verdad muestra los valores que toma la función para cada una de las combinaciones o posibles valores de las variables X e Y .

Sea la función: $F_1(Z, Y, X) = XY + X'Z + X'Z'$.

Los valores de la función se encuentran evaluando la expresión para cada una de las combinaciones de valores de las variables. Para las tres variables binarias existen 2^3 combinaciones posibles tales que:

$$\begin{array}{ll}
 F_1(0,0,0) = 0 + 0 + 1 & F_1(0,0,0) = f_0 = 1 \\
 F_1(0,0,1) = 0 + 0 + 0 & F_1(0,0,1) = f_1 = 0 \\
 F_1(0,1,0) = 0 + 0 + 1 & F_1(0,1,0) = f_2 = 1 \\
 F_1(0,1,1) = 1 + 0 + 0 & F_1(0,1,1) = f_3 = 1 \\
 F_1(1,0,0) = 0 + 1 + 0 & F_1(1,0,0) = f_4 = 1 \\
 F_1(1,0,1) = 0 + 0 + 0 & F_1(1,0,1) = f_5 = 0 \\
 F_1(1,1,0) = 0 + 1 + 0 & F_1(1,1,0) = f_6 = 1 \\
 F_1(1,1,1) = 1 + 0 + 0 & F_1(1,1,1) = f_7 = 1
 \end{array}$$

Donde f_i es el valor de la función cuando las variables Z , Y , X toman valores binarios específicos equivalentes al número decimal i , siendo X el bit menos significativo y Z el más significativo.

En la tabla 2-1., se muestra la tabla de la verdad de la función lógica F_1 .

Z	Y	X	$F_1(Z,Y,X)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Tabla 2-1. Tabla de la verdad de $F_1 = XY + X'Z + X'Z'$

La tabla de la verdad para cualquier función es única, no así la expresión en álgebra de Boole. Dos funciones que posean la misma tabla de la verdad son equivalentes.

Sean las funciones $G(z,y,x)$ y $H(z,y,x)$, tal que:

$$G(Z,Y,X) = XY + X'$$

$$H(Z,Y,X) = Y + X'$$

Ambas funciones poseen la misma tabla de la verdad de F_1 , por lo cual todas son equivalentes, es decir: $F_1 = G = H$.

2.3.3 FORMAS CANÓNICAS

Las formas canónicas son importantes puesto que nos permiten obtener la expresión en álgebra de conmutación de una función directamente de su tabla de la verdad.

La forma canónica es aquella en la que todas las variables de la función aparecen en cada término. Los términos que poseen todas las variables de la cual depende una función se denominan términos estándar.

Sea la función F1 presentada en las expresiones equivalentes siguientes:

$$F1(x, y) = (x + y') (x' + y') \quad (1)$$

$$F1(x, y) = x y' + y' \quad (2)$$

$$F1(x, y) = x' y' + x y' \quad (3)$$

Obsérvese que la expresión (1) está formada por términos suma estándar, mientras que en la expresión (3) son términos producto estándar, ambas se denominan expresiones canónicas. La expresión (2) es una suma de productos no estándar.

2.3.4 SUMA DE MINITÉRMINOS

La forma disyuntiva canónica o suma de productos estándar de una expresión está formada por la suma lógica de dos o más términos productos. En esta forma cada término producto estándar se denomina minitérmino.

Minitérminos

Sean X e Y dos variables binarias independientes, existen $2^2 = 4$ términos productos estándar o minitérminos posibles, estos son: $X' Y'$, $X' Y$, $X Y'$, $X Y$;), tal como se indica en la tabla 2-2.

VARIABLES		TERMINO ESTANDAR	NOTACION	
MSB	LSB			
X	Y	$F(X,Y)$	f_i	m_i
0	0	$X' Y'$	f_0	m_0
0	1	$X' Y$	f_1	m_1
1	0	$X Y'$	f_2	m_2
1	1	$X Y$	f_3	m_3

Tabla 2-2 Minitérminos (m_i) para dos variables

Cada uno de estos minitérminos toma el valor de uno para un único valor de las variables. A los minitérminos se les asigna un número decimal, representado en forma abreviada m_i , equivalente al valor binario de las variables para el cual el minitérmino toma el valor de uno (ver tabla 2-2).

Suma de productos estándar

Desarrollemos ahora la idea de que toda función puede ser representada como la suma de sus minitérminos.

Sea la función genérica $F(X,Y)$ que se indica en la tabla 2-1, donde f_i es el valor, 0 ó 1 de la función para los correspondientes valores de las variables; entonces, se puede expresar cualquier función $F(X,Y)$ como:

$$F(X,Y) = f_0 (X' Y') + f_1 (X' Y) + f_2 (X Y') + f_3 (X Y)$$

La función puede así ser representada por:

$$F(X,Y) = f_0 m_0 + f_1 m_1 + f_2 m_2 + f_3 m_3.$$

Para una función cualquiera, los términos para los cuales la función es cero ($f_i = 0$) no formarán parte de la expresión. Por tanto, una función puede ser expresada como la suma de aquellos términos estándar productos en los cuales la función toma el valor de $f_i = 1$ (minitérminos m_i), lo cual es denominado suma de minitérminos y denotado como:

$$F(X,Y) = \sum m_i$$

Es importante observar que el número decimal correspondiente a un minitérmino depende del ordenamiento de las variables, en este caso Y es la variable menos significativa.

EJEMPLO 2-1

Sea $F(Z,Y,X)$ la función cuya tabla de la verdad es mostrada en la tabla 2-3.

Z	Y	X	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabla 2-3 Tabla de la verdad de $F(Z,Y,X) = \sum m(1,2,3,7)$

Se observa de la tabla, que la función es uno para los minitérminos 1, 2, 3 y 7. siendo Z es el bit más significativo (MSB) y X el menos significativo (LSB).

Por tanto:

$$F(Z,Y,X) = \sum m_i = \sum m(1,2,3,7)$$

$$F(Z,Y,X) = Z'Y'X + Z'YX' + Z'YX + ZYX$$

Por otra parte, si cambiamos el orden de las variables tal que X sea el bit más significativo (MSB) y Z el menos significativo (LSB), la función es uno para los minitérminos 4, 2, 6 y 7. Por tanto la suma de minitérminos corresponde a:

$$F(X,Y,Z) = \sum m_i = \sum m(4,2,6,7)$$

$$F(X,Y,Z) = XY'Z' + X'YZ' + XYZ' + XYZ$$

EJEMPLO 2-2

Sea $F(X,Y,Z)$ la función cuya tabla de la verdad es mostrada en la tabla 2-4

ENTRADAS				SALIDA	MINITÉRMINOS
	X	Y	Z	F	
0	0	0	0	1	$X'Y'Z'$
1	0	0	1	0	-
2	0	1	0	0	-
3	0	1	1	1	$X'YZ$
4	1	0	0	1	$XY'Z'$
5	1	0	1	0	-
6	1	1	0	1	XYZ'
7	1	1	1	1	XYZ

Tabla 2-4 Términos Productos Estandar de $F(X,Y,Z) = \sum m(0,3,4,6,7)$

Por tanto, la función puede ser expresada como la suma de aquellos minitérminos m_i o términos productos estándar en los cuales la función toma el valor de uno:

$$F(X,Y,Z) = \sum(0,3,4,6,7)$$

$$F(X,Y,Z) = X'Y'Z' + X'YZ + XY'Z' + XYZ' + XYZ$$

2.3.5 PRODUCTO DE MAXITÉRMINOS

La forma conjuntiva o producto de sumas de una expresión es la formada por productos lógicos de dos o más términos sumas. En esta forma cada término se denomina maxitérmino.

Maxitérminos

Sean X e Y dos variables binarias independientes, existen 4 términos suma estándar o maxitérminos posibles, estos son: $X'+Y'$, $X'+Y$, $X+Y'$, $X+Y$.

Cada uno de estos maxitérminos toma el valor de cero lógico para un único valor de las variables. A los maxitérminos se les asigna un número decimal en forma abreviada M_i , equivalente al valor binario para el cual el maxitérmino toma el valor de cero (0), tal como se indica en la tabla 2-5.

X	Y	TERMINO ESTANDAR	NOTACIÓN	
MSB	LSB		M_i	f_i
0	0	$X + Y$	M0	f_0
0	1	$X + Y'$	M1	f_1
1	0	$X' + Y$	M2	f_2
1	1	$X' + Y'$	M3	f_3

Tabla 2-5 Maxitérminos para dos variables

Producto de sumas estándar

Sea la función genérica $F(X,Y)$ como se indica en la tabla 2-5, donde f_i es el valor (0 ó 1) de la función para los correspondientes valores de las variables.

Recordando que un producto de sumas toma el valor de cero cuando al menos uno de los términos producto es cero y que el maxitérmino vale cero para una sola de los valores de las variables, entonces, se puede expresar cualquier función $F(X,Y)$ como el producto de sumas estándar siguiente :

$$F(X,Y) = [f_0 + (X + Y)] [f_1 + (X + Y')] [f_2 + (X' + Y)] [f_3 + (X' + Y')]]$$

Lo cual puede ser representado por:

$$F(X,Y) = (f_0 + M_0) (f_1 + M_1) (f_2 + M_2) (f_3 + M_3)$$

Es decir, una función puede ser expresada como el producto de los maxitérminos M_i donde la función toma el valor de $f_i = 0$, lo cual es denominado producto de maxitérminos y es denotado como: $F(X,Y) = \prod M_i$

Es importante observar que el número decimal correspondiente a un maxitérmino depende del ordenamiento de las variables, en este caso la variable menos significativa es Y

EJEMPLO 2-3

Sea $F(x,y,z)$ la función cuya tabla de la verdad es mostrada en la tabla 2-6.

	ENTRADAS			SALIDA	MAXITÉRMINOS
	X	Y	Z		
0	0	0	0	1	-
1	0	0	1	0	$X+Y+Z'$
2	0	1	0	0	$X+Y'+Z$
3	0	1	1	1	-
4	1	0	0	1	-
5	1	0	1	0	$X'+Y+Z'$
6	1	1	0	1	-
7	1	1	1	1	-

Tabla 2-6 Términos Productos Estandar de $F(x,y,z) = \bar{0} M(1,2,5)$

Los maxitérminos son aquellos en que la función toma el valor de cero. Por tanto, la función puede ser expresada como el producto los maxitérminos:

$$F(x,y,z) = \prod M(1,2,5)$$

$$F(x,y,z) = (x+y+z') (x+y'+z) (x'+y+z')$$

2.3.6 COMPUERTAS LÓGICAS

Una forma de representar las funciones lógicas es la utilización de símbolos denominados compuertas lógicas ("Gates") para cada uno de los operadores del álgebra de Boole. En los sistemas digitales, las compuertas son dispositivos electrónicos de conmutación y son los elementos básicos de los sistemas combinacionales. Enseguida se muestran los símbolos más utilizados de los operadores del álgebra de conmutación.

Compuertas básicas

En las figuras 2-1 y 2-2 se muestra la representación tradicional y alternativa de las compuertas básicas u operadores básicos.

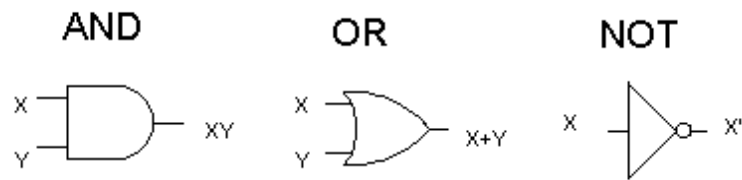


Figura 2-1 Compuertas de operaciones básicas

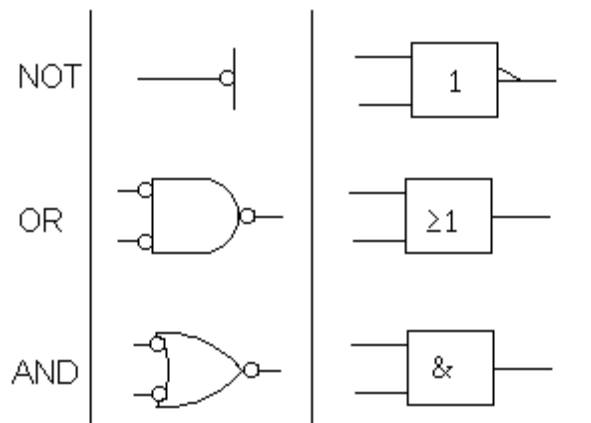


Figura 2-2 Otros símbolos de operaciones básicas

La segunda columna de la figura 2-2 muestra la representación dada por el estándar ANSI /IEEE 1984, los símbolos de la primera columna corresponden a la aplicación del teorema de DeMorgan.

El símbolo alterno se obtiene del símbolo estándar de la siguiente manera:

1. Invirtiendo cada entrada y salida del símbolo estándar. Esto se logra agregando círculos pequeños en las líneas de entrada y salida que no los tenga y suprimiendo los círculos donde ya haya.
2. Cambie el símbolo de operación por su dual, AND por OR o viceversa.

Debe estar claro que las compuertas son validas para cualquier número de entradas y que los símbolos estándar y alternativos de cada compuerta representan el mismo circuito físico, operador o compuerta.

Compuerta OR Exclusivo

Una función u operación ampliamente utilizada es el OR Exclusivo.

El símbolo del operador OR exclusivo es la suma en un círculo \oplus y está definido como: $F(X, Y) = X \oplus Y = \overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y}$

En la figura 2-3 se muestra la representación de la compuerta OR exclusivo denominada abreviadamente XOR y su tabla de la verdad.

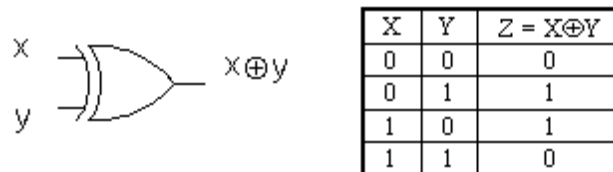


Figura 2-3 Compuerta y operación OR Exclusivo

El operador del OR exclusivo posee las siguientes propiedades:

$$X \oplus X = 0 \quad X \oplus 1 = \overline{X}$$

$$X \oplus \overline{X} = 1 \quad X \oplus (Y \oplus Z) = (X \oplus Y) \oplus Z$$

$$X \oplus 0 = X$$

Como se muestra en la tabla de la verdad, la salida de la compuerta XOR será uno (1) lógico si una, pero no ambas, de las entradas es uno (1) lógico. El comportamiento de la compuerta también puede ser descrito como:

- La salida es uno si el número de unos en las entradas (X e Y) es impar
- La salida es uno si las entradas (X e Y) tienen valores diferentes.
- La salida es igual a la entrada Y si el valor de la entrada X es 0 lógico, y es igual al complemento de la entrada Y (Y') si el valor de la entrada X es 1 lógico.

La última descripción nos indica que la compuerta XOR se comporta como una compuerta NOT controlada por la entrada o variable X.

Compuerta NOR Exclusivo

El símbolo de esta compuerta y su operador (círculo con punto central) se presenta en la figura 2-4. Esta compuerta representa la siguiente operación:

$$F(X, Y) = \overline{X \oplus Y} = X \odot Y = XY + \overline{X}\overline{Y}$$

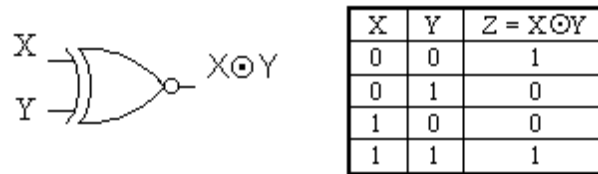


Figura 2-4 Compuerta y operación NOR Exclusivo

Compuerta NAND

La compuerta NAND corresponde a la función o operación:

$$F(X, Y) = \overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$$

Esto no es más que la Operación AND complementada, de ahí sus símbolos mostrados en la figura 2-5.

Compuerta NOR

La compuerta NOR corresponde a la función o operación:

$$F(X, Y) = \overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

Nuevamente, esto no es más que la Operación OR complementada, de ahí sus símbolos. Los símbolos más usados se muestran en la figura 2-5.

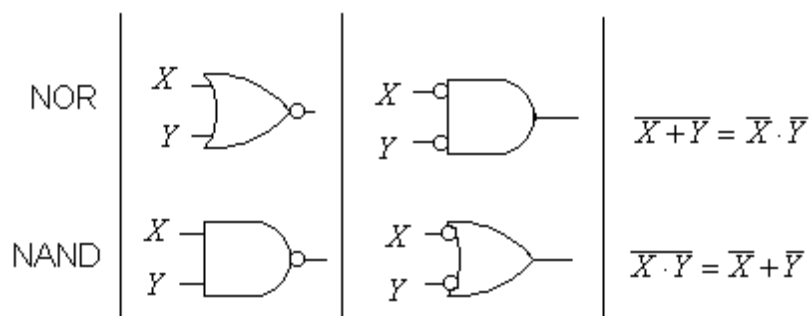


Figura 2-5 Símbolos de compuertas NAND y NOR

Circuitos lógicos y diagramas de tiempo

Una función lógica se puede representar de múltiples formas utilizando las diferentes compuertas lógicas. Como se dijo anteriormente, cada una de estas compuer-

tas también representa un circuito electrónico de conmutación que permite implementar las funciones en circuitos llamados circuitos lógicos o combinacionales.

Sea la función:

$$G(A,B,D,E) = [(A.B)' + D']' [D + E]$$

Una representación con compuertas es mostrada en la figura 2-6.

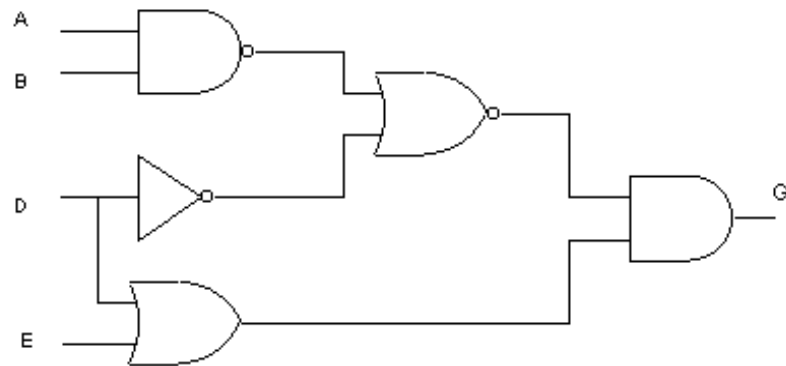


Figura 2-6 Representación de $G(A,B,D,E) = [(A.B)' + D']' [D + E]$

Cada una de estas compuertas o circuitos puede presentarse con los símbolos tradicionales o utilizando los símbolos alternos. Otra forma de representar una función lógica es el diagrama de tiempos. Consiste en realizar la gráfica en el tiempo de las variables de entrada y la salida para todas las posibles combinaciones de los valores de las entradas. En la figura 2-7 se ilustra el diagrama de tiempos de la función G.

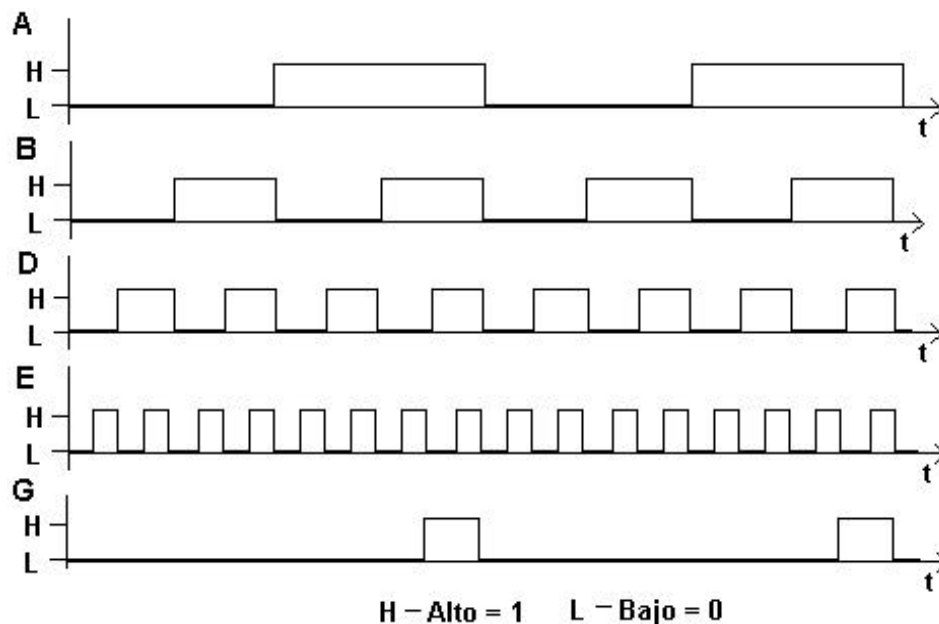


Figura 2-7 Diagrama de tiempos de $G(A,B,D,E)$

Universalidad de las compuertas NAND y NOR

Todas las operaciones lógicas básicas pueden ser representadas o realizadas utilizando solamente compuertas NAND (o NOR) como se muestra en la figura 2-8 y figura 2-9, el teorema de DeMorgan así lo comprueba. Esto significa que toda compuerta lógica puede ser representada a través de compuertas NAND (o NOR) únicamente. Por tanto, es posible crear cualquier circuito lógico únicamente utilizando compuertas NAND y/o NOR.

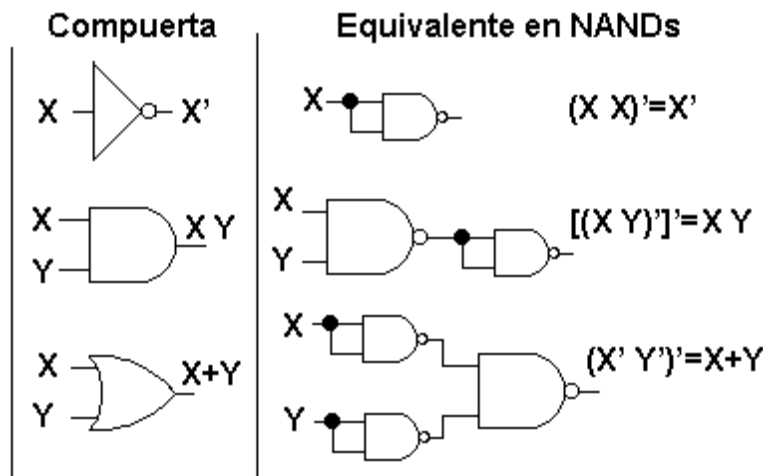


Figura 2-8 Compuertas básicas y su equivalente en NAND

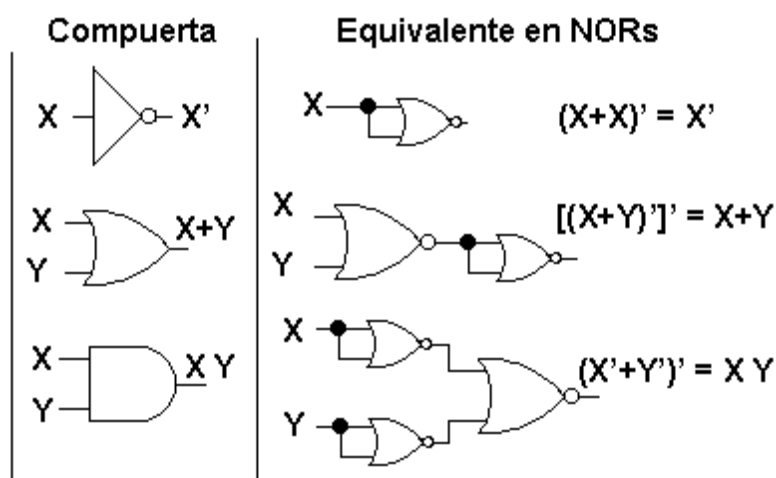


Figura 2-9 Compuertas básicas y su equivalente en NOR

Se ve entonces que las compuertas NAND y/o NOR tienen la particularidad de que, en combinaciones adecuadas, pueden reemplazar cualquiera de estas compuertas fundamentales.

EJEMPLO 2-4

Sea: $G(A,B,C,D) = AB + CD + E$,

Implementar la función lógica G con compuertas NAND de dos entradas.

Solución:

Primero, la expresión se realiza con compuertas básicas (figura 2-10), luego se sustituye cada compuerta por el equivalente respectivo obteniéndose el circuito de la figura 2-11.

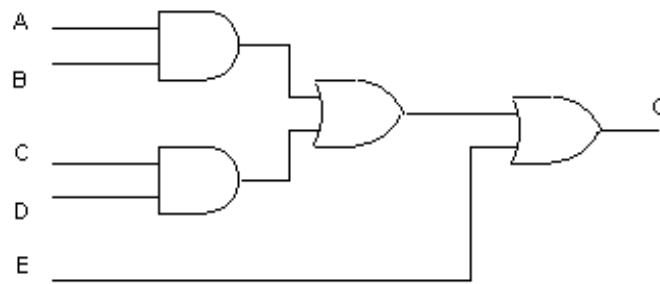


Figura 2-10 Circuito lógico de $G(A,B,C,D) = AB + CD + E$

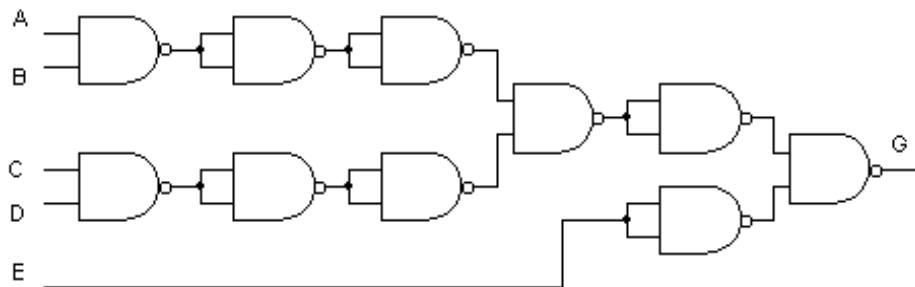


Figura 2-11 Circuito lógico de $G(A,B,C,D)$ con NAND

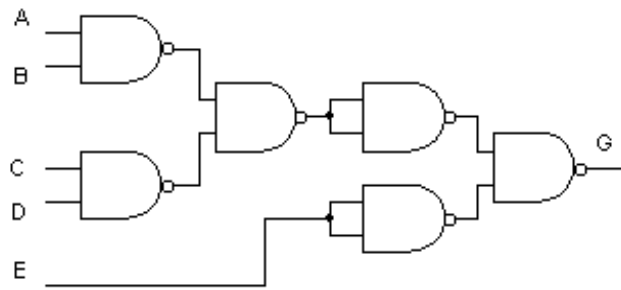


Figura 2-12 Circuito lógico final de $G(A,B,C,D)$ con NAND

En el caso de quedar dos inversores NAND en serie, se procede a su simplificación y así obtener el circuito lógico final (figura 2-12).

2.3.7 SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

Los problemas de diseño de circuitos lógicos se suelen plantear de diferentes maneras, pero normalmente, la etapa final de diseño consiste en convertir una expresión booleana en un circuito representado por compuertas. Cada una de estas compuertas lógicas es un circuito eléctrico de conmutación. Es por tanto importante, para hacer el circuito eléctrico lo más sencillo (pequeño) posible, el que la expresión booleana esté simplificada al máximo para así utilizar la menor cantidad de compuertas.

Además de los axiomas y propiedades dados anteriormente, existen diversos teoremas que son utilizados en el Algebra de Boole. A continuación se presenta una lista de las propiedades y teoremas que utilizaremos para la reducción de expresiones booleanas.

Ref.	DENOMINACIÓN	TEOREMA (SP)	DUAL (PS)
P1	ELEMENTO NULO	$1+X=1$	$0 X=0$
P2	IDEMPOTENCIA	$X+X=X$	$X X=X$
P3	COMPLEMENTO	$X+X'=1$	$X X'=0$
P4	INCLUSIÓN	$X+X Y=X$	$X (X+Y)=X$
P5	ADYACENCIA	$X Y+X Y'=X$	$(X+Y) (X+Y')=X$
P6	SIMPLIFICACIÓN	$X+X' Y=X+Y$	$X (X'+Y)=X Y$
P7	DeMorgan	$(X Y Z')'=X'+Y'+Z$	$(X+Y+Z')'=X'Y'Z$

Es de notar que en las anteriores ecuaciones una variable X puede representar más de una variable independiente. Por ejemplo, si $X=WZ'$; tendremos que el teorema de adyacencia se puede expresar como:

$$W Z' Y + W Z' Y' = W Z'$$

La prueba de un teorema se puede realizar de dos formas:

- Comprobando la igualdad de las tablas de la verdad de ambos miembros del teorema.
- Por deducción a través de la aplicación de axiomas y/o teoremas probados con anterioridad.

A continuación se deducen algunos teoremas y se simplifican algunas expresiones o funciones booleanas.

EJEMPLO 2-5

Demostración del teorema de inclusión o absorción.

$$\begin{aligned} X + XY &= X \\ X + XY &= X(1) + XY \\ &= X(1 + Y) \\ &= X \end{aligned} \quad \text{P1}$$

De otra manera:

$$\begin{aligned} X + XY &= X \\ X + XY &= X(1) + XY \\ &= X(Y + Y') + XY \\ &= XY + XY' + XY \\ &= XY + XY' \\ &= X(Y + Y') \\ &= X \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{P3} \\ \text{P2} \\ \text{P3} \end{array}$$

EJEMPLO 2-6

Demostración del teorema del consenso: $XY + X'Z + YZ = XY + X'Z$

$$\begin{aligned} XY + X'Z + YZ &= XY + X'Z + YZ \\ &= XY + X'Z + YZ(1) \\ &= XY + X'Z + YZ(X + X') \\ &= XY + X'Z + YZX + YZX' \\ &= XY(1 + Z) + X'Z(1 + Y) \\ &= XY + X'Z \end{aligned} \quad \text{P3}$$

EJEMPLO 2-7

Reduzca a tres literales la siguiente función booleana:

$$F(x, y, z, w) = xy + yz' + zw + yw' + yz$$

Solución:

$$F(x,y,z,w)=xy+yz'+zw+yw'+yz$$

$$=xy+y+zw+yw'$$

P5 términos 2 y 5

$$=xy+y+zw$$

P4 términos 2 y 4

$$=y+zw$$

P4 términos 1 y 2

2.4 CIRCUITOS DE PASO

En muchas oportunidades se necesita permitir o evitar (inhibir) el "paso" de una señal lógica desde una entrada hacia una salida. Para ello se pueden utilizar cada las compuertas lógicas básicas. La figura 2-13 presenta el control del paso de la señal de pulsos (entrada 1) hacia la salida por medio de una señal (ventana) en la entrada 2.

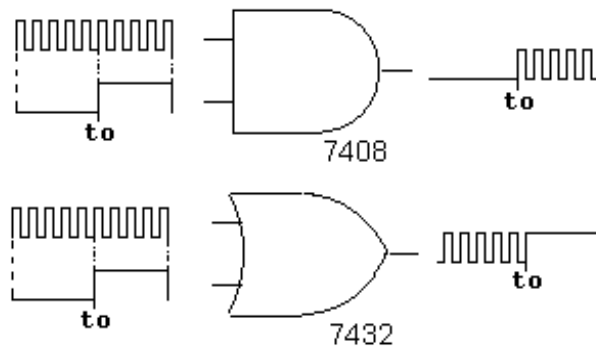


Figura 2-13 Compuertas utilizadas como inhibidores

Las compuertas inhibidoras pueden ser vista como un interruptor lógico. En este caso, lo importante es el proceso que realiza la compuerta y no su expresión algebraica o la tabla de la verdad. [2]