

Álgebra de Boole

Prof. Luis Araujo

Sistemas Digitales

<http://www.ing.ula.ve/~araujol/sd>

Postulados del álgebra de boole

- Postulado 1:

- DEFINICION: un álgebra booleana es un sistema algebraico cerrado formado por dos elementos 0 y 1 (Conjunto K), y operadores \cdot y $+$; para cada par de elementos a y $b \in K$; $a \cdot b$ y $a + b \in K$,

donde: $+$ \Rightarrow or

\cdot \Rightarrow and

a	b	a+b	a	b	a·b
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Postulados del álgebra de boole

- Postulado 2:
 - Existe elementos 0 y 1, tal que, para $a \in K$:
 - a) $a + 0 = a$ (elemento neutro)
 - b) $a \cdot 1 = a$ (elemento identidad)
- Postulado 3: Ley Conmutativa
 - Para a y $b \in K$:
 - a) $a + b = b + a$
 - b) $a \cdot b = b \cdot a$

Postulados del álgebra de boole

- Postulado 4: Ley Asociativa,
 - Para a, b y $c \in K$:
 - a) $a + (b + c) = (a + b) + c$
 - b) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Postulado 5: Ley Distributiva
 - Para a, b y $c \in K$:
 - a) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
 - b) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
- Postulado 6: Complemento
 - Para $a \in K$:
 - a) $a + \overline{a} = 1$ b) $a \cdot \overline{a} = 0$

Principio de Dualidad

Establece que si una expresión es válida en el álgebra de boole, entonces su expresión dual también lo es.

Determinamos la expresión dual reemplazando los operadores $+$ por \cdot y viceversa y todos los elemento 0 por 1 y viceversa.

Ejm:

$a + (b \cdot c) = 1$, expresión su dual es $a \cdot (b + c) = 0$

Teoremas

- Teorema 1: Idempotencia

$$a) a + a = a$$

$$b) a \cdot a = a$$

- Demostración:

$$a + a =$$

$$(a + a) \cdot 1 =$$

$$(a + a) \cdot (a + \bar{a}) =$$

$$a + a \cdot \bar{a} =$$

$$a + 0 = a$$

Teoremas

- Teorema 2: Elemento neutro para $+$ y \cdot

$$a) a + 1 = 1$$

$$b) a \cdot 0 = 0$$

- Demostración:

$$a + 1 =$$

$$(a + 1) \cdot 1 =$$

$$1 \cdot (a + 1) =$$

$$(a + \bar{a}) \cdot (a + 1) =$$

$$a + \bar{a} \cdot 1 =$$

$$a + \bar{a} = 1$$

Teoremas

- Teorema 3: Involución

$$\overline{\overline{a}} = a$$

- Demostración:

$$a + 1 =$$

$$\overline{\overline{a}} \cdot 1 + 0 =$$

$$\overline{\overline{a}} \cdot (a + \overline{a}) + a \cdot \overline{a} =$$

$$\overline{\overline{a}} \cdot a + \overline{\overline{a}} \cdot \overline{a} + a \cdot \overline{a} =$$

$$a \cdot (\overline{\overline{a}} + \overline{a}) = a$$

Teoremas

- Teorema 4: Absorción

$$a) a + a \cdot b = a$$

$$b) a \cdot (a + b) = a$$

- Demostración:

$$a + a \cdot b =$$

$$a \cdot 1 + a \cdot b =$$

$$a \cdot (1 + b) =$$

$$a \cdot 1 = a$$

Teoremas

- Teorema 5:

$$a) a + \bar{a} \cdot b = a + b$$

$$b) a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$$

- Demostración:

$$a + \bar{a} \cdot b =$$

$$(a + \bar{a}) \cdot (a + b) =$$

$$1 \cdot (a + b) =$$

$$(a + b) \cdot 1 = a + b$$

Teoremas

- Teorema 6:

$$a) a \cdot b + a \cdot \bar{b} = a$$

$$b) (a + b) \cdot (a + \bar{b}) = a$$

- Demostración:

$$a \cdot b + a \cdot \bar{b} =$$

$$a \cdot (b + \bar{b}) =$$

$$a \cdot 1 = a$$

Teoremas

- Teorema 7:

$$a) a \cdot b + a \cdot \bar{b} \cdot c = a \cdot b + a \cdot c$$

$$b) (a + b) \cdot (a + \bar{b} + c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

- Demostración:

$$a \cdot b + a \cdot \bar{b} \cdot c =$$

$$a \cdot (b + \bar{b} \cdot c) =$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Teoremas

- Teorema 8: Teorema de Morgan

$$a) \overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$b) \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

- En general:

$$\overline{a + b + \dots + z} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \dots \cdot \bar{z}$$

$$\overline{a \cdot b \cdot c \cdot \dots \cdot z} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \dots + \bar{z}$$

Demostración del T. de Morgan

$$x = a + b \Rightarrow \bar{x} = \overline{a + b}$$

sabemos :

$$x \cdot \bar{x} = 0$$

$$x + \bar{x} = 1$$

asumimos :

$$x \cdot y = 0$$

$$x + y = 1$$

entonces :

$$y = \bar{x}$$

asumimos :

$$y = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$x \cdot y =$$

$$(a + b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) =$$

$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot (a + b) =$$

$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot a + (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot b =$$

$$a \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) + b \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) =$$

$$(a \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot b) =$$

$$0 \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot 0 =$$

$$\bar{b} \cdot 0 + \bar{a} \cdot 0 =$$

$$0 + 0 = 0$$

entonces :

$$x \cdot y = 0$$

$$x + y =$$

$$(a + b) + \bar{a} \cdot \bar{b} =$$

$$(b + a) + \bar{a} \cdot \bar{b} =$$

$$b + (a + \bar{a} \cdot \bar{b}) =$$

$$b + (a + \bar{b}) =$$

$$(a + \bar{b}) + b =$$

$$a + (\bar{b} + b) =$$

$$a + 1 = 1$$

entonces :

$$x + y = 1$$

resulta :

$$\bar{x} = y \Rightarrow \overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$$

Teoremas

- Teorema 9: Consenso

$$a) a \cdot b + \bar{a} \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + \bar{a} \cdot c$$

$$b) (a + b) \cdot (\bar{a} + c) \cdot (b + c) = (a + b) \cdot (\bar{a} + c)$$

- Demostración:

$$a \cdot b + \bar{a} \cdot c + b \cdot c =$$

$$a \cdot b + \bar{a} \cdot c + 1 \cdot b \cdot c =$$

$$a \cdot b + \bar{a} \cdot c + (a + \bar{a}) \cdot b \cdot c =$$

$$a \cdot b + \bar{a} \cdot c + a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c = a \cdot b + \bar{a} \cdot c$$

Funciones de Conmutación

Sean x_1, x_2, \dots, x_n símbolos llamados **variables**, cada uno representa un 0 o un 1, definiremos $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ como una **función de conmutación** de x_1, x_2, \dots, x_n . f puede tomar el valor de 0 ó 1 según los valores para x_1, \dots, x_n ; si existen n variables (x_i), entonces existe 2^n formas de asignar los valores para x_1, \dots, x_n y como f tiene dos posibles valores, existen 2^{2^n} diferentes funciones para n variables.

Ejemplos:

- $n=0$

$$f() = 0, 1$$

- $n=1$

$$f(x) = 0, 1, x, \bar{x}$$

- $n=2$

$$f(x,y) = \begin{matrix} 0 & , & x \cdot \bar{y} & , & x \cdot y & , & x \\ \bar{x} \cdot \bar{y} & , & \bar{y} & , & x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y} & , & x + \bar{y} \\ \bar{x} \cdot y & , & x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y & , & y & , & x + y \\ \bar{x} & , & \bar{x} + \bar{y} & , & \bar{x} + y & , & 1 \end{matrix}$$

Representación de una función de Conmutación

- **Tabla de Verdad:**

Evaluamos todos los posibles valores de entrada de la función y los colocamos en una tabla en forma ordenada de acuerdo al orden decimal.

Ejemplo:

$$f(x,y) = x + y$$

a	b	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$f(x,y) = x \cdot y$$

a	b	a·b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabla de Verdad

- Describa una función de conmutación con 3 entradas a,b y c y una salida z, que es verdadera (1) cuando al menos 2 de sus entradas son verdaderas (1).

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Representación de una función de Conmutación

- Formas Algebraicas

- **SOP** (Suma de Productos): se construye al sumar (or) términos productos (and).

- Ejm.:
$$f(a,b,c,d) = a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot d + \bar{a} \cdot c \cdot \bar{d}$$

- **POS** (Producto de Sumas): se construye con el producto (and) de términos suma (or).

- Ejm.:
$$f(a,b,c,d) = (a + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + d)$$

Formas Algebraicas:

$$f(a,b,c) = a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b}$$

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Representación de una función de Conmutación

- Formas Canónicas:

Son formas SOP y POS con características especiales. Existe una única forma canónica para cada función de conmutación.

- **Mintérmino**: es un término producto (and) para una función de n variables, en donde cada una aparece bien sea complementada o sin complementar.

- Ejm:

$$f(a,b,c) \quad m = a \cdot b \cdot c, a \cdot \bar{b} \cdot c, \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$$

- **Maxtérmino**: es un término suma (or) para una función de n variables, en donde cada una aparece bien sea complementada o sin complementar.

- Ejm:

$$f(a,b,c) \quad M = (a + b + c), (a + \bar{b} + \bar{c})$$

Formas Canónicas SOP

$$f(a,b,c) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot c$$

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$$

$$\rightarrow a \cdot \bar{b} \cdot c$$

$$\rightarrow a \cdot b \cdot c$$

Relación con la tabla de verdad:

Cada mintérmino esta asociado con la línea de la tabla, tal que:

- Las variables que tienen 1 no están complementadas
- Las variable que tienen 0 aparecen complementadas

Formas Canónicas POS

$$f(a,b,c) = (\bar{a} + \bar{b} + c) \cdot (a + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (a + b + c)$$

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\rightarrow a + b + c$$

$$\rightarrow a + \bar{b} + \bar{c}$$

$$\rightarrow \bar{a} + \bar{b} + c$$

Relación con la tabla de verdad:

Cada maxtérmino esta asociado con la línea de la tabla, tal que:

- Las variables que tienen 0 no están complementadas
- Las variable que tienen 1 aparecen complementadas

Representación de una función de Conmutación

- Especificación decimal:

- SOP:

$$f(a,b,c) = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot c$$

$$f(a,b,c) = m_2 \cdot m_3 \cdot m_6 \cdot m_7$$

$$f(a,b,c) = \sum m(2,3,6,7)$$

- POS:

$$f(a,b,c) = (a + b + \bar{c}) \cdot (a + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + b + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + c)$$

$$f(a,b,c) = M_1 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_7$$

$$f(a,b,c) = \prod M(1,3,5,7)$$

Relación Mintérminos - Maxtérminos

$$\overline{m_i} = M_i$$

$$\overline{M_i} = m_i$$

$$f(a,b,c) = \sum m(2,3,6,7) = \prod M(0,1,4,5)$$

Deducción de Formas Canónicas

- Teorema 10: Teorema de desarrollo de Shannon

$$a) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot f(1, x_2, \dots, x_n) + \overline{x_1} \cdot f(0, x_2, \dots, x_n)$$

$$b) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [x_1 + f(0, x_2, \dots, x_n)] \cdot [\overline{x_1} + f(1, x_2, \dots, x_n)]$$

Convertir a SOP Canónica

$$f(a,b,c) = a \cdot b + a \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot c$$

$$= a \cdot f(1,b,c) + \bar{a} \cdot f(0,b,c)$$

$$= a \cdot (b + \bar{c}) + \bar{a} \cdot c$$

$$= b \cdot f(a,1,c) + \bar{b} \cdot (a,0,c)$$

$$= b \cdot (a + \bar{a} \cdot c) + \bar{b} \cdot (a \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot c)$$

$$= a \cdot b + \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c$$

$$= c \cdot f(a,b,1) + \bar{c} \cdot (a,b,0)$$

$$= c \cdot (a \cdot b + \bar{a} \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}) + \bar{c} \cdot (a \cdot b + a \cdot \bar{b})$$

$$= a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$$

$$= \sum m(1,3,4,6,7)$$

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Convertir a SOP Canónica

$$T6: a \cdot b + a \cdot \bar{b} = a$$

$$f(a, b, c) = a \cdot b + a \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot c$$

$$a \cdot b = a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot \bar{c} = m_7 + m_6$$

$$a \cdot \bar{c} = a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = m_6 + m_4$$

$$\bar{a} \cdot c = \bar{a} \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c = m_3 + m_1$$

$$f(a, b, c) = \sum m(1, 3, 4, 6, 7)$$

Convertir a POS Canónica

$$\begin{aligned}f(a,b,c) &= a \cdot (a + \bar{c}) \\&= (a + b \cdot \bar{b} + c \cdot \bar{c}) \cdot (a + b \cdot \bar{b} + \bar{c}) \\&= ((a + b) \cdot (a + \bar{b}) + c \cdot \bar{c}) \cdot ((a + b) \cdot (a + \bar{b}) + \bar{c}) \\&= (a + b + c \cdot \bar{c}) \cdot (a + \bar{b} + c \cdot \bar{c}) \cdot (a + b + \bar{c}) \cdot (a + \bar{b} + \bar{c}) \\&= (a + b + c) \cdot (a + b + \bar{c}) \cdot (a + \bar{b} + c) \cdot (a + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (a + b + \bar{c}) \cdot (a + \bar{b} + \bar{c}) \\&= \prod M(0,1,2,3)\end{aligned}$$