

## TEMA 2

# Álgebra de Boole

*Variables, operaciones y funciones lógicas*

*Teoremas fundamentales del Álgebra de Boole*

*Puertas lógicas*

*Minimización de funciones lógicas*

### 1 Variables, operaciones y funciones lógicas

Variables lógicas

$$A = \{0,1\}$$

Operaciones lógicas

SUMA		
A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

PRODUCTO		
A	B	A · B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

NEGACIÓN	
A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Función

$$F = f(A, B, C, \dots)$$

$$f(A, B, C) = A\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}$$

## 2

## Teoremas fundamentales

## Teorema del cierre

El resultado de aplicar cualquier función booleana a variables booleanas tiene como resultado una variable booleana

## Teorema de idempotencia

$$A + A = A$$

$$A \cdot A = A$$

## Teorema de involución

$$\overline{(\overline{A})} = A$$

## Propiedad conmutativa

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

## Propiedad asociativa

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

## Propiedad distributiva

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$$

## Teorema del absorción

$$A + AB = A$$

$$A \cdot (A + B) = A$$

## Ley de De Morgan

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

N variables:

$$\overline{A + B + C \dots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \dots$$

$$\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \dots$$

## Ley de De Morgan generalizada

$$\overline{F(A, B, C, \dots, +, \cdot)} = F(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \dots, \cdot, +)$$

Ejemplo:  $f(A, B, C, D, E) = [(A + C)\overline{D} + BE](D + E)$   
 $\overline{f(A, B, C, D, E)} = (\overline{AC} + D) \cdot (\overline{B} + \overline{E}) + \overline{DE}$

## Formas canónicas

$$F(A,B,C,...) = AF(1,B,C) + \bar{A}F(0,B,C)$$

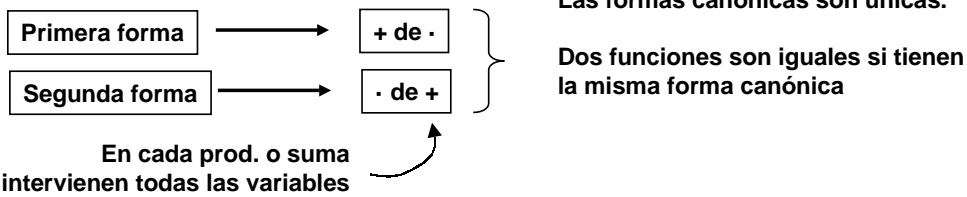
Ejemplo

$$\begin{aligned} f(A,B) &= Af(1,B) + \bar{A}f(0,B) = \\ &= ABf(1,1) + A\bar{B}f(1,0) + \bar{A}Bf(0,1) + \bar{A}\bar{B}f(0,0) \end{aligned} \quad \text{1ª forma canónica}$$

$$F(A,B,C,...) = [A + F(0,B,C,...)][\bar{A} + F(1,B,C,...)]$$

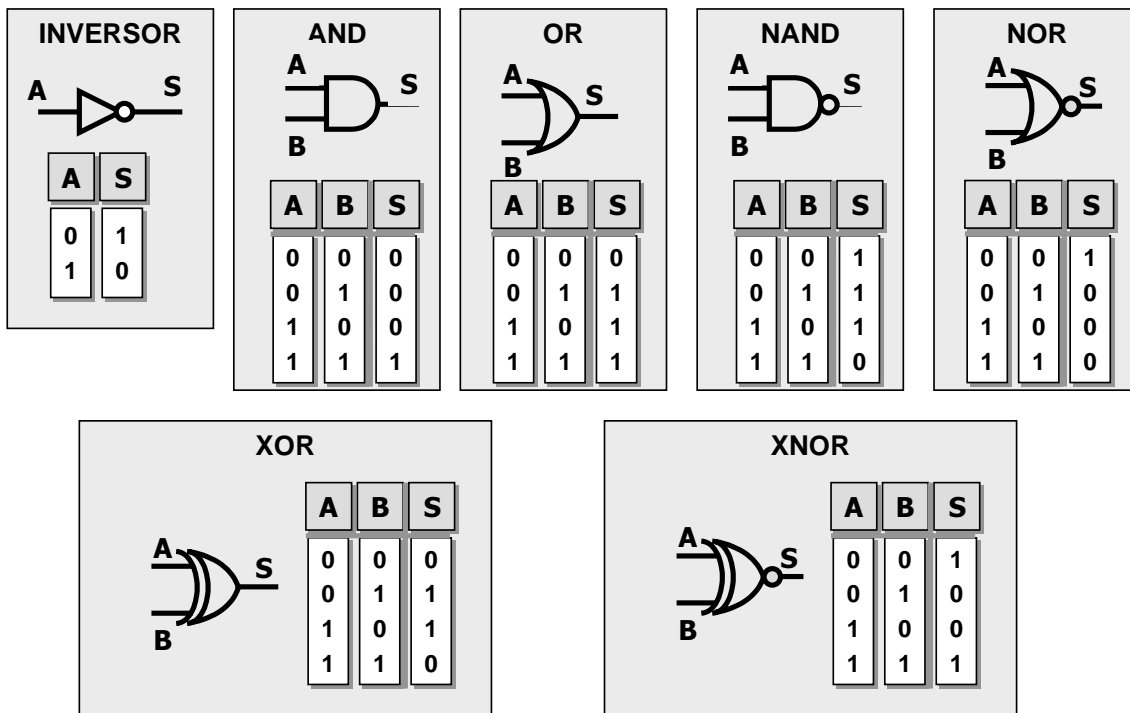
Ejemplo

$$\begin{aligned} f(A,B) &= [A + f(0,B)][\bar{A} + f(1,B)] = \\ &= [A + B + f(0,0)][A + \bar{B} + f(0,1)] \\ &\quad [\bar{A} + B + f(1,0)][\bar{A} + \bar{B} + f(1,1)] \end{aligned} \quad \text{2ª forma canónica}$$

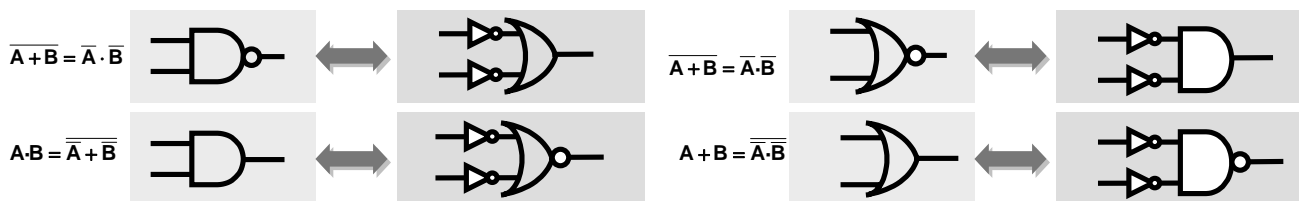
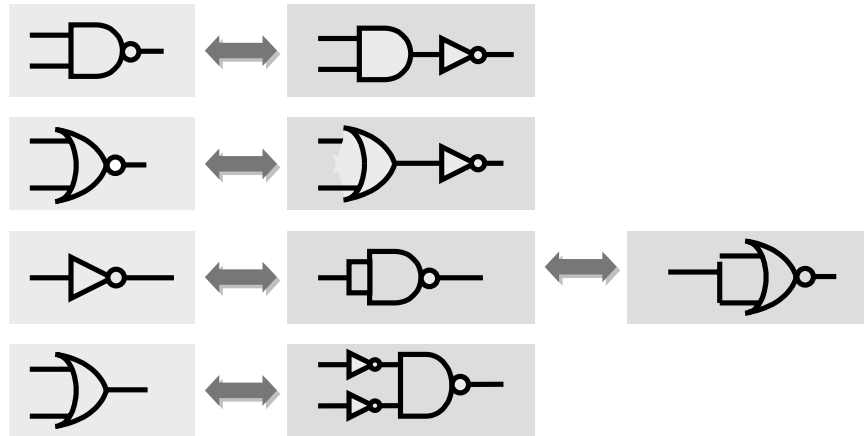


## 3

## Puertas lógicas

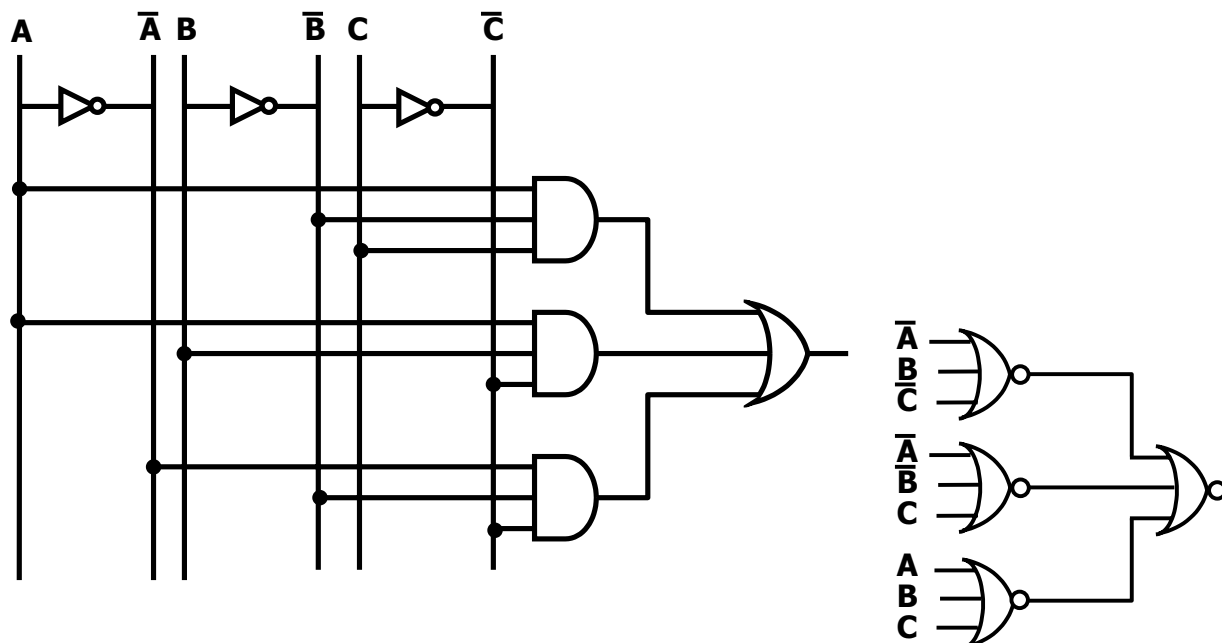


## Equivalencia entre puertas



## Ejemplo

Representar mediante puertas NOR la función:  $f = \overline{A}BC + A\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}C$



## 4 Minimización de funciones lógicas

A	B	C	D	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$$\begin{aligned}
 f &= \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + \overline{A}BCD = \\
 &= \overline{A}\overline{C}\overline{D}(B + \overline{B}) + \overline{A}\overline{B}C(D + \overline{D}) + \overline{A}BC(D + \overline{D}) + \overline{A}BCD = \\
 &= \overline{A}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}BCD = \\
 &= \overline{A}\overline{C}\overline{D} + AC + \overline{A}BCD
 \end{aligned}$$

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	1	1		
	01				
	11		1	1	1
	10			1	1

### ¿Qué hemos hecho?

Aplicar la distributiva → Celdas contiguas



T. De idempotencia →

Repetir un producto más de una vez



### ¿Qué hay que hacer, en general?

Agrupar todos los 1s en grupos lo más grandes posibles, sin importar solapes entre ellos.

Se deben considerar las adyacencias de los bordes.

Cada agrupación es un producto.

Las XOR no se deducen, aunque suelen ser



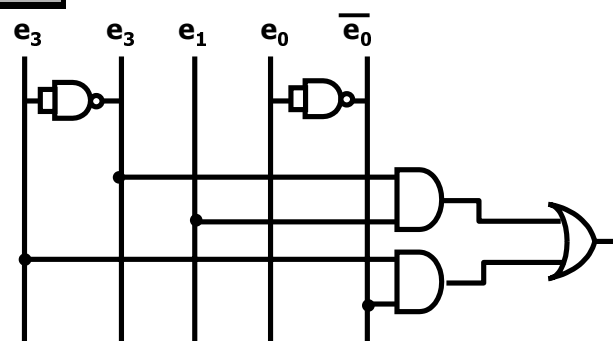
**Ejemplo**

Diseñar un circuito con puertas NAND que determine si el mes del año, codificado en binario natural con 4 bits, tiene 31 días (salida a valor 1) o menos de 31 día (salida a 0).

	$e_3$	$e_2$	$e_1$	$e_0$	$f$
X	0	0	0	0	X
E	0	0	0	1	1
F	0	0	1	0	0
M	0	0	1	1	1
A	0	1	0	0	0
M	0	1	0	1	1
J	0	1	1	0	0
J	0	1	1	1	1
A	1	0	0	0	1
S	1	0	0	1	0
O	1	0	1	0	1
N	1	0	1	1	0
D	1	1	0	0	1
X	1	1	0	1	X
X	1	1	1	0	X
X	1	1	1	1	X

$e_3 e_2$	00	01	11	10
$e_1 e_0$	00	X	0	1
01	1	1	X	0
11	1	1	X	0
10	0	0	X	1

$$f = \bar{e}_3 e_0 + e_3 \bar{e}_0 = e_3 \oplus e_0$$

**Mapa de Karnaugh de 5 variables**