

Capítulo 1 Electroestática

1.1 Ley de Coulomb

La magnitud de la fuerza eléctrica que ejerce una partícula sobre otra es directamente proporcional al producto de sus cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. La dirección de la fuerza sigue la línea que une a las partículas.

Matemáticamente, la fuerza eléctrica F que ejerce una partícula q' sobre una partícula de carga q a la distancia r se calcula a través de

$$F = k \frac{qq'}{r^2} \quad (1.1)$$

donde k es una constante de proporcionalidad cuyo valor numérico depende del sistema de unidades que se emplee. En el sistema SI

$$k = 8.99 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

También, suele expresarse como

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (1.2)$$

$$\text{Donde } \epsilon_0 = 8.85 * 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

La constante ϵ_0 ("épsilon cero") se llama constante eléctrica, o constante de permitividad. En términos de la constante de permitividad, la ley de Coulomb de la fuerza que ejerce una partícula q' sobre una partícula de carga q se transforma en,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \quad (1.3)$$

La ley de Coulomb se aplica a partículas, como a electrones y protones, y también a todos los cuerpos cargados pequeños, siempre que los tamaños de esos cuerpos sean mucho menores que las distancias entre ellos; a esos cuerpos se les llama **cargas puntuales**. Es obvio que la ecuación (1.1) se parece a la Ley de Newton de la fuerza gravitacional; la constante k es análoga a la constante G , y las cargas eléctricas son equivalentes a las masas que gravitan.

Esta ecuación no solo da como resultado la magnitud de la fuerza, sino también su dirección, si se interpreta que un valor positivo de la fuerza F como repulsión, y un valor

negativo como atracción. Por ejemplo, en el caso de la fuerza que ejerce un protón sobre un electrón, las carga $q' = e$ y $q = -e$, entonces

$$F = k \frac{e \times (-e)}{r^2} = -k \frac{e^2}{r^2}$$

que es negativa, por lo que indica atracción.

Podemos decir que la fuerza eléctrica que ejerce la partícula de carga q sobre la partícula de carga q' tiene la misma magnitud que la ejercida por q' sobre q , pero su dirección es opuesta. En la Figura 1.1 consideramos el caso de dos cargas de signos iguales, donde la fuerza $\vec{F}_{q' \rightarrow q} = -\vec{F}_{q \rightarrow q'}$ (Tercera ley de Newton). En el caso, de dos cargas de signo opuesto, la fuerza es de atracción, tal como se muestra en la Figura 1.2.

Consideremos dos cargas de signos iguales.

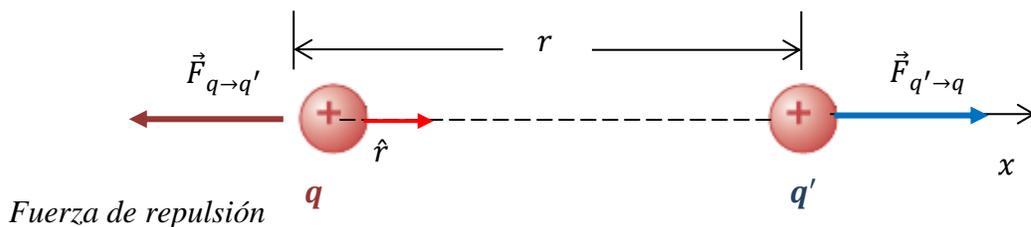


Figura 1. 1 Dos cargas del mismo signo se repelen.

Consideremos dos cargas de signos distintos.

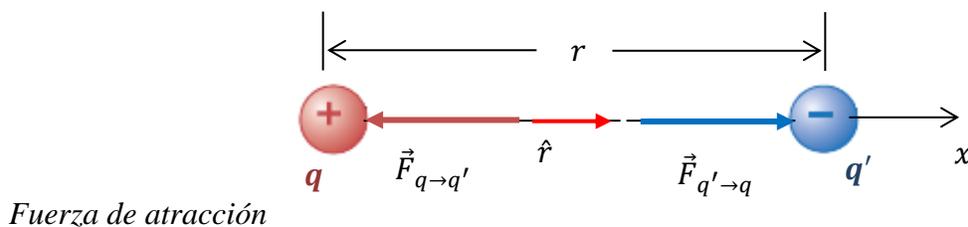


Figura 1. 2 Dos cargas de signo opuesto se atraen.

De acuerdo a los resultados mostrados anteriormente, La ley de Coulomb se puede escribir vectorialmente como

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \hat{r} \tag{1.4}$$

Donde \hat{r} es un vector unitario que indica la dirección de la fuerza, el cual está a lo largo de la línea de acción que une a las dos partículas cargadas. La Fuerza eléctrica yace sobre dicha línea de acción.

Ejemplo 1.1 Cantidad de electrones y protones en un vaso de agua

Cuanta carga positiva y cuanta carga negativa hay en los protones y los electrones de un vaso de agua (250gr)?

Planteamiento: Es un ejercicio para apreciar la cantidad de carga que hay en un vaso de agua, el cual puede ser referencial para estimar la cantidad de carga que tiene un ser humano, considerado éste como formado por más de un 70% de agua.

Ejecutar:

La "masa molecular" del agua es 18gr, por consiguiente, 250gr de agua equivalen a:

$\frac{250}{18} \text{ moles}$. Cada *mol* tiene $6.02 * 10^{23}$ *moléculas*, que resultan en

$$\frac{250}{18} \times 6.02 * 10^{23} \text{ moléculas}$$

En el vaso. Cada molécula está formada por dos átomos de hidrógeno (con un electrón cada uno) y un átomo de oxígeno (con ocho electrones). Entonces, en cada molécula hay 10 electrones, y la carga total negativa de todos los electrones es

$$(250gr) \left(\frac{1mol}{18gr} \right) (6.02 * 10^{23} \text{ moléculas}) \left(10 \frac{\text{electrones}}{\text{moléculas}} \right) \left(-1.6 * 10^{-19} \frac{C}{\text{electrón}} \right) \\ = -1.3 * 10^7 C$$

La carga positiva de los protones es la misma, pero con signo contrario.

Ejemplo 1.2 Fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales

Dos cargas puntuales, $q = +25nC$ y $q' = -75nC$ están separadas por una distancia de 3.0cm(figura 1.3a). Calcule la magnitud y la dirección de a) la fuerza eléctrica que q ejerce sobre q' ; y b) la fuerza eléctrica que q' ejerce sobre q .

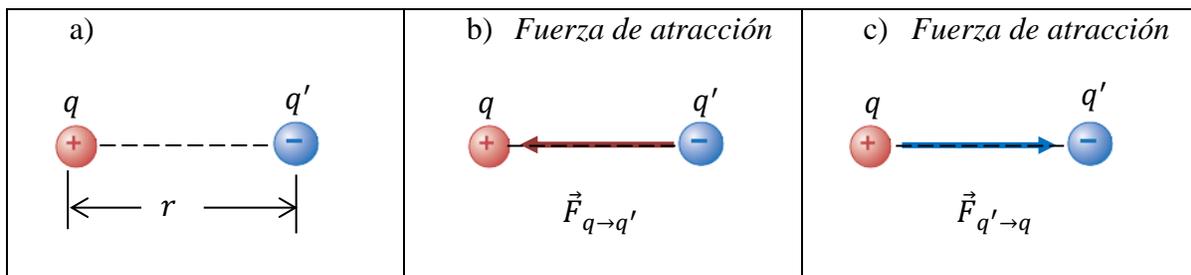


Figura 1. 3 Dos cargas de signo opuesto se atraen. a) fuerza eléctrica que q ejerce sobre q' . b) fuerza eléctrica que q' ejerce sobre q .

Planteamiento: Se emplea la ecuación (1.3) para calcular la magnitud de la fuerza que ejerce cada partícula sobre la otra. Se utiliza la tercera ley de Newton para relacionar las fuerzas que una partícula ejerce sobre la otra.

Ejecutar: a) Magnitud y la dirección de la fuerza que q ejerce sobre q'

Primero hay que convertir la carga a Coulomb y la distancia a metros,

$$q = 25 * 10^{-9}C \quad q' = -75 * 10^{-9}C \quad r = 3.0 * 10^{-2}m$$

Entonces, ahora podemos aplicar la ecuación (1.3) para determinar la magnitud de la fuerza que q ejerce sobre q' esto es,

$$F_{q \rightarrow q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} = 9 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{(25 * 10^{-9}C)(-75 * 10^{-9}C)}{(3.0 * 10^{-2}m)^2} \Rightarrow F_{q \rightarrow q'} = 0.0019N$$

b) Magnitud y la dirección de la fuerza que q' ejerce sobre q

La tercera ley de Newton se aplica a la fuerza eléctrica. Aun cuando las cargas tienen diferentes magnitudes, la magnitud de la fuerza que q' ejerce sobre q es la misma, que la magnitud de la fuerza que q ejerce sobre q' :

$$F_{q' \rightarrow q} = 0.0019N$$

La tercera ley de Newton también establece que la dirección de la fuerza que ejerce q' sobre q tiene exactamente la dirección opuesta, que la de la fuerza que q ejerce sobre q' ; esto se indica en la figuras (1.3b) y (1.3c)

Ejemplo 1.3 Fuerza eléctrica y fuerza gravitacional

Comparece las magnitudes de la fuerza gravitacional de atracción y la fuerza eléctrica de atracción entre el electrón y el protón de un átomo de hidrógeno. De acuerdo con la mecánica de Newton ¿cuál es la aceleración del electrón? Si se supone que la distancia entre estas partículas, en un átomo de hidrógeno, es de $5.3 * 10^{-11}m$.

Planteamiento: Los valores de carga, del electrón y el protón así como sus masas, son valores conocidos que pueden ser consultados en la tabla de constantes en el Anexo. En la figura 1.4, se ilustra el modelo a tratar según el problema

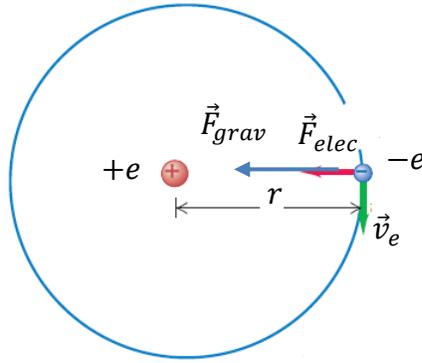


Figura 1.4 Movimiento de un electrón alrededor de un protón (se supone que este estacionario)

Ejecutar:

Magnitud de la Fuerza eléctrica

La magnitud de la fuerza de atracción eléctrica está dada por la ecuación

$$F_{elec} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|e||-e|}{r^2}$$

$q = +e$ y $q' = -e$, siendo $e = 1.6 * 10^{-19}C$, conocida como la carga fundamental.

$$F_{elec} = 9 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{(e)(e)}{(5.3 * 10^{-11}m)^2} = 8.99 * 10^9 \frac{Nm^2 (1.6 * 10^{-19}C)^2}{C^2 (5.3 * 10^{-11}m)^2}$$

$$F_{elec} = 8.2 * 10^{-8}N$$

Magnitud de la Fuerza gravitacional

La magnitud de la fuerza de atracción gravitacional

$$F_{grav} = G \frac{mm'}{r^2}$$

$$m = m_{+e} = 1.67 * 10^{-27}Kg \quad \text{y} \quad m' = m_{-e} = 9.11 * 10^{-31}Kg$$

$$F_{grav} = 6.67 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2} \frac{(1.67 * 10^{-27}Kg)(9.11 * 10^{-31}Kg)}{(5.3 * 10^{-11}m)^2}$$

$$F_{grav} = 3.6 * 10^{-47}N$$

La relación entre estas fuerzas es

$$\frac{F_{elec}}{F_{grav}} = \frac{8.2 * 10^{-8} N}{3.6 * 10^{-47} N} \Rightarrow \frac{F_{elec}}{F_{grav}} = 2.3 * 10^{39}$$

Por consiguiente, la fuerza eléctrica es abrumadoramente mayor de la fuerza gravitacional.

Dado que la fuerza gravitacional es insignificante en comparación con la fuerza eléctrica, se puede despreciar. En este caso, la aceleración del electrón es

$$a = \frac{F_{elec}}{m_e} \Rightarrow a = \frac{8.2 * 10^{-8} N}{9.11 * 10^{-31} Kg} \Rightarrow a = 9.0 * 10^{22} m/s^2$$

Es una aceleración gigantesca.

Ejemplo 1.4 Fuerza de atracción entre dos vasos de agua

Cuál es la magnitud de la fuerza de atracción que ejercen los electrones en un vaso de agua sobre los protones en otro vaso de agua que está a $10m$ de distancia.

Planteamiento: De acuerdo con el ejemplo 1.1, la carga de los electrones en el vaso es $q = -1.3 * 10^7 C$, y la carga de los protones es $q' = +1.3 * 10^7 C$. Estos pueden considerarse como cargas puntuales, y la fuerza está dada por la Ley de Coulomb.

Ejecutar:

Si se considera a los dos vasos como cargas puntuales, la fuerza eléctrica que ejercen los protones de un vaso contra los protones del otro vaso es

$$F_{elec} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$$

$$F_{elec} = 8.99 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{(-e)(+e)}{(10m)^2} = 8.99 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \frac{(-1.3 * 10^7 C)(-1.3 * 10^7 C)}{(10m)^2}$$

$$F_{elec} = 1.5 * 10^{22} N$$

Es aproximadamente ¡el peso de 10^{18} toneladas! Esta enorme fuerza de atracción sobre los protones se anula exactamente por una fuerza de repulsión igualmente grande, que ejercen los protones de un vasos sobre los protones del otro. Así, los vasos no ejercen fuerzas eléctricas netas entre ellos.

1.2 Superposición de Fuerzas eléctricas

Si hay varias cargas puntuales q_1, q_2, q_3, \dots que ejercen al mismo tiempo fuerzas eléctricas sobre la carga q , la fuerza neta sobre q se obtiene calculando la suma vectorial de las fuerzas individuales (Figura 1.5). Así, si los vectores que representan a las fuerzas individuales producidas por q_1, q_2, q_3, \dots sobre q , son $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$, respectivamente, entonces la fuerza neta es

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots \quad (1.5)$$

La ecuación (1.5) expresa el principio de superposición de las fuerzas eléctricas. De acuerdo con esta ecuación, la fuerza que aporta cada carga es independiente de la presencia de las demás cargas.

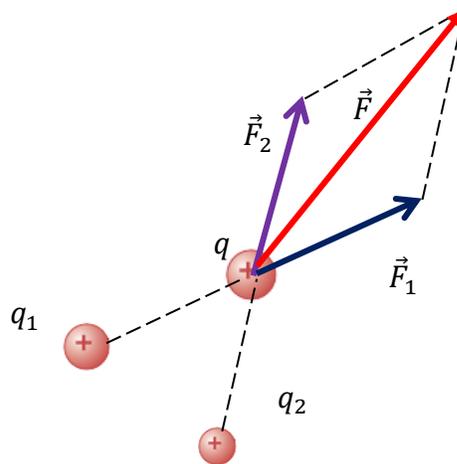


Figura 1.5 Dos cargas puntuales q_1 y q_2 ejercen fuerzas eléctricas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 sobre la carga puntual q . La fuerza neta sobre q es la suma vectorial de esas fuerzas.

Ejemplo 1.5 Electroscopio

Un electroscopio simple para detectar y medir cargas eléctricas se compone de dos pequeñas esferas de corcho cubiertas con lámina metálica; cada una pesa $1.5 \times 10^{-4} \text{Kg}$ y están colgadas de un hilo de 10cm de longitud. Cuando se agregan cargas eléctricas iguales a las esferas, la fuerza de repulsión eléctrica las aleja, y el ángulo entre los hilos indica magnitud de la carga eléctrica. Si los ángulos de equilibrio entre los hilos es 30° , ¿cuál es la magnitud de la carga?

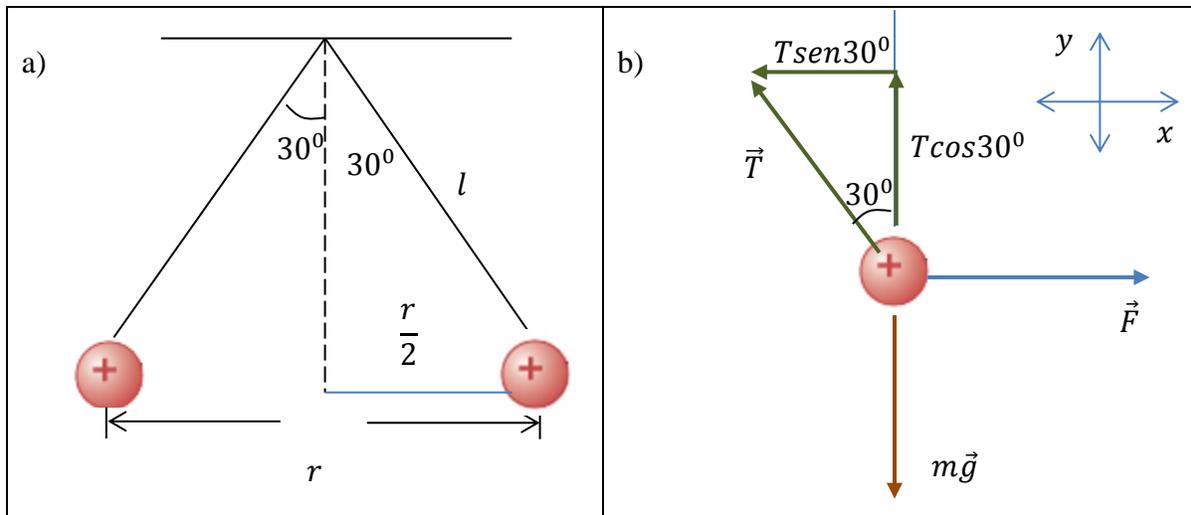


Figura 1.6 a) Dos esferas de cargadas con el mismo signos colgadas de hilos. b) Diagrama del cuerpo libre para la esfera derecha.

Planteamiento: Este ejemplo es semejante al caso de un sistema en equilibrio estático. Su estudio es semejante al hecho en el curso de mecánica para tales sistemas. En este caso, cada esfera puede considerarse como una masa puntual, sometidas a diferentes fuerzas (peso, $m\vec{g}$; la tensión del hilo, T y la fuerza de repulsión eléctrica \vec{F}). Nuestro problema se reduce al análisis de equilibrio estático de una partícula, semejante a los casos estudiados en el Capítulo 8.

Ejecutar: De la Figura 1.6, las componentes de la fuerzas a lo largo del eje x e y son, respectivamente

$$\sum_x F - T \sin(30^\circ) = 0 \quad \sum_x -mg + T \cos(30^\circ) = 0$$

Entonces

$$T \sin(30^\circ) = F \quad (a) \quad T \cos(30^\circ) = mg \quad (b)$$

Al dividir (a) entre (b), resulta

$$\tan(30^\circ) = \frac{F}{mg} \Rightarrow F = mg \tan(30^\circ)$$

Pero de acuerdo a la ley de Coulomb, la fuerza eléctrica entre las esferas, consideradas como cargas puntuales es: F es igual

$$F = k \frac{qq'}{r^2} = k \frac{q^2}{r^2}$$

Entonces igualando este resultado con el obtenido previamente, obtenemos

$$mg \tan(30^\circ) = k \frac{q^2}{r^2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{mgr^2 \tan 30^\circ}{k}}$$

De la figura vemos que

$$\sin 30^\circ = \frac{r}{2l} \Rightarrow r = 2l \sin 30^\circ = l$$

$$q = \sqrt{\frac{mgl^2 \tan 30^\circ}{k}}$$

Sustituyendo los valores numéricos de m, g, l y k , resulta

$$q = \sqrt{\frac{1.5 \times 10^{-4} \text{Kg} * 9.8 \text{m/s}^2 (10 * 10^{-2} \text{m})^2 \tan 30^\circ}{9 * 10^9 \frac{\text{Nm}}{\text{Kg}^2}}} \Rightarrow q = 3.1 * 10^{-8} \text{C}$$

Ejemplo 1.6 Suma vectorial de fuerzas eléctricas en un plano

Dos cargas, $+Q$ y $-Q$, están separadas por la distancia d , como se muestra en la figura, equidistante a estas cargas hay un carga puntual q , a distancia x , del punto medio. ¿Cuál es la fuerza eléctrica \vec{F} sobre q .

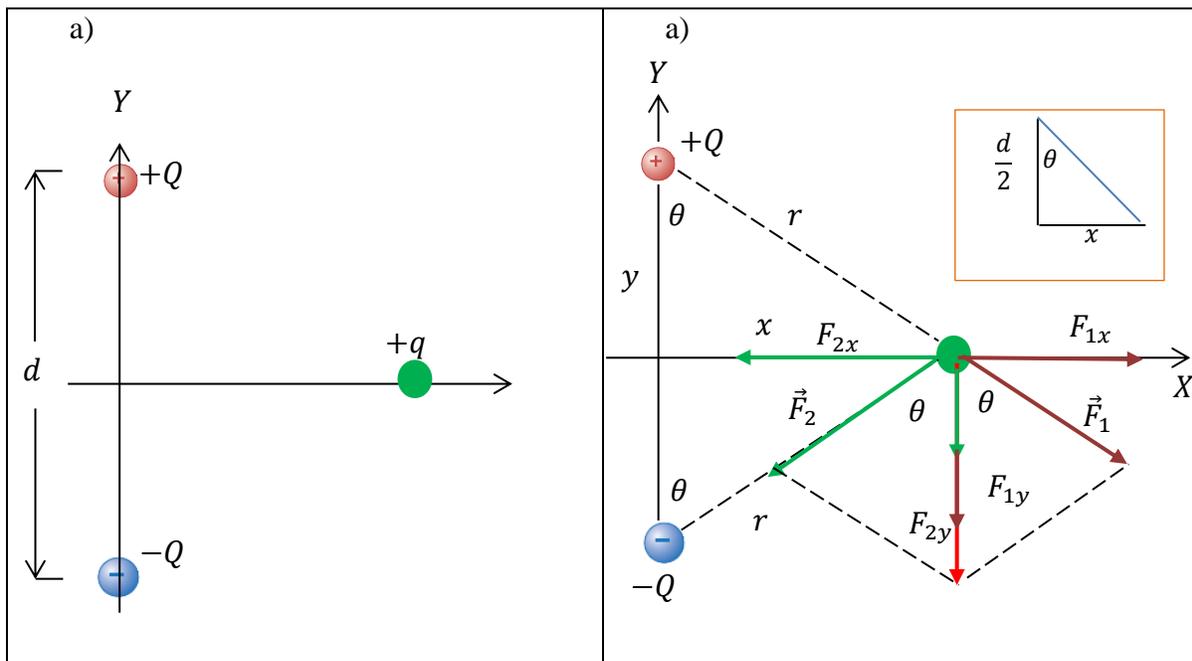


Figura 1.7 a) Las cargas $+Q$ y $-Q$ ejercen las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 sobre la carga q . b) Las componentes x y y de \vec{F}_1 y \vec{F}_2 .

Planteamiento: Tenemos que calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre q y después obtener la suma vectorial de las fuerzas.

Como se ilustra en la figura 1.7b, la carga $+Q$ produce una fuerza de repulsión sobre la carga q , y la carga $-Q$ produce una fuerza de atracción. El vector \vec{F}_1 , se aleja de $+Q$, y el vector \vec{F}_2 , se acerca de $-Q$. Por consiguiente, las magnitudes de las fuerzas individuales que ejerce $+Q$ y $-Q$ sobre q , de acuerdo a ley de Coulomb, según la simetría de la configuración son iguales, es decir

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}$$

De acuerdo a la figura 1.6b la distancia entre $+Q$ y q , que por simetría es igual a la de $-Q$ y q , es

$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{d^2}{4} \quad \text{donde } y = \frac{d}{2}$$

Entonces,

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{x^2 + \frac{d^2}{4}}$$

En la figura 1.6b, observamos que las componentes horizontales de \vec{F}_1 y \vec{F}_2 se anulan, pues F_{1x} y F_{2x} tienen direcciones opuestas, entonces,

$$F_{1x} - F_{2x} = 0$$

Mientras que las componentes verticales se suman, pues F_{1y} y F_{2y} tienen la misma dirección (dirección $-Y$)

$$F_y = -F_{1y} - F_{2y}$$

Pero

$$F_{1y} = F_1 \cos(\theta) \quad F_{2y} = F_2 \cos(\theta)$$

Entonces

$$F_y = -F_1 \cos(\theta) - F_2 \cos(\theta)$$

Recordemos que

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{x^2 + \frac{d^2}{4}}$$

$$F_y = -F_1 \cos(\theta) - F_1 \cos(\theta) = -2F_1 \cos(\theta)$$

$$F_y = -2F_1 = -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{x^2 + \frac{d^2}{4}} \cos\theta$$

De acuerdo a la figura 1.6b

$$\cos(\theta) = \frac{\frac{d}{2}}{r} = \frac{d}{2r} \quad \text{siendo } r = \sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}}$$

Entonces

$$\cos(\theta) = \frac{d}{2\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}}}$$

Finalmente

$$F_y = -2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{x^2 + \frac{d^2}{4}} \right) \left(\frac{d}{2\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}}} \right)$$

$$F_y = -\frac{2Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{2 \left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}} \quad F_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qqd}{\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{3/2}}$$

Comentarios:

Si la carga q está muy lejos ya sea $+Q$ o $-Q$, podemos deprecia la distancia d^2 que las separa en comparación con la distancia x^2 de la carga q , en este caso

$$x^2 + \frac{d^2}{4} \approx x^2$$

Y por tanto nuestro resultado

$$F_y \approx F \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{x^3}$$

En este caso, la fuerza F es proporcional a $1/x^3$; esto es, la fuerza disminuye en proporción al inverso del cubo de la distancia que las separa de la carga q . Así, aunque la fuerza aportada por cada carga $\pm Q$ puntual es una fuerza del inverso del cuadrado, la fuerza neta tiene un comportamiento diferente, porque a grandes distancia la fuerza que aporta una carga tiende a anular la aportada por la otra.

Actividad 1.1 Suma vectorial de fuerzas eléctricas en un plano

Del ejemplo 1.6, condiciere las cargas puntuales iguales y positivas de magnitud, $Q = 2 * 10^{-6}C$ localizadas en $x = 0, y = +0.30m$, $x = 0, y = -0.30m$, respectivamente. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza eléctrica total (neta) que ejercen estas cargas sobre una tercera carga, también puntual, $q = 4 * 10^{-6}C$ en $x = 0.40m$, y $y = 0$?

Ejemplo 1.7 Suma vectorial de las fuerzas eléctricas sobre una línea

Dos cargas puntuales se localizan en el eje $+x$ de un sistema de coordenadas. La carga $q_1 = 1.0 * 10^{-9}C$ está en el origen, y la carga $q_2 = -3.0 * 10^{-9}C$ está a $4.0cm$ del origen. ¿Cuál es la fuerza total que ejercen estas dos cargas sobre una carga $q_3 = 5.0 * 10^{-9}C$ que se encuentra a $2.0cm$ del origen? Las fuerzas gravitatorias son despreciables.

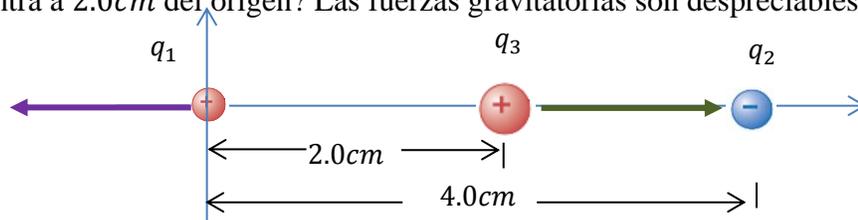


Figura 1.8 Dos cargas q_1 y q_2 que interactúan con una tercera carga q_3

Planteamiento: Aquí hay dos fuerzas eléctricas que actúan sobre la carga q_3 , las cuales deben sumarse algebraicamente para calcular la fuerza total.

Fuerza ejercida por q_1 sobre q_3

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r^2}$$

Esta fuerza tiene una componente x negativa porque q_3 es repelida (es decir, empujada en la dirección $-x$) por q_1 . Cuya magnitud es

$$F_{(q_1 \rightarrow q_3)_x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_3|}{r^2}$$

$$F_{(q_1 \rightarrow q_3)_x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1.0 * 10^{-9}C)(5.0 * 10^{-9}C)}{(2.0 * 10^{-2}m)^2} \Rightarrow F_{(q_1 \rightarrow q_3)_x} = 1.12 * 10^{-4}N$$

$$= 112\mu N$$

$$\vec{F}_{(q_1 \rightarrow q_3)_x} = 112\mu N(-\hat{i}) = -112\mu N\hat{i}$$

Fuerza ejercida por q_2 sobre q_3

$$\vec{F}_{q_2 \rightarrow q_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r^2}$$

Esta fuerza tiene una componente $+x$ positiva porque q_3 es atraída en la dirección $+x$ por q_2 . Cuya magnitud es

$$F_{F_{(q_2 \rightarrow q_3)_x}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r^2}$$

$$F_{F_{(q_2 \rightarrow q_3)_x}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3.0 * 10^{-9}C)(5.0 * 10^{-9}C)}{(4.0 * 10^{-2}m)^2} \Rightarrow F_{(q_2 \rightarrow q_3)_x} = 8.4 * 10^{-5}N$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{(q_2 \rightarrow q_3)_x} = 84\mu N(\hat{i})$$

$$\vec{F}_n = -\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_3}\hat{i} + \vec{F}_{q_2 \rightarrow q_3}\hat{i} = -112\mu N\hat{i} + 84\mu N\hat{i} \Rightarrow \vec{F}_n = -28\mu N\hat{i}$$

Así que la fuerza total sobre q_3 se dirige hacia la izquierda, con magnitud $28\mu N\hat{i}$

Ejemplo 1.8 Distribuciones discretas de cargas con alta simetría

Si una distribución de cargas puntuales es simétrica de alguna manera, con frecuencia se simplifica el cálculo de la fuerza neta. En el ejemplo 1.6, la posición de la carga q es equidistante a las cargas $+Q$ y $-Q$ dió como resultado la anulación de una componente de la fuerza. Si la distribución es más simétrica, el resultado se puede simplificar aún más, como por ejemplo

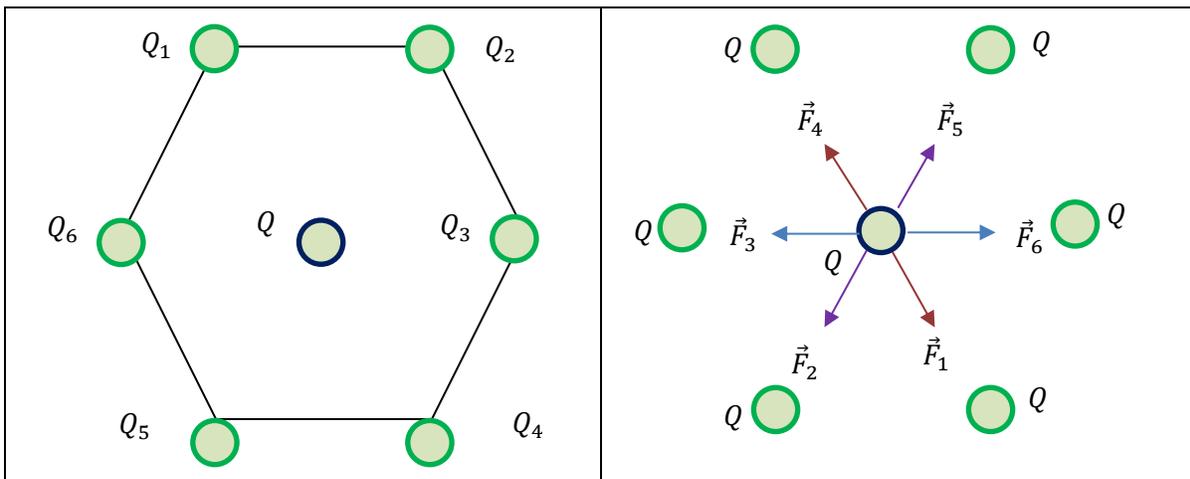


Figura 1.9 a) Cargas puntuales que forman un hexágono que rodea a una carga central. b) Fuerzas eléctricas sobre la partícula central, debida a cada una de las otras seis.

Planteamiento: Este ejemplo corresponde a una aplicación de la Ley de Coulomb para diferentes pares de cargas.

De acuerdo a la ley de Coulomb

$$\vec{F}_{Q_1 \rightarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q}{r^2}; \quad \vec{F}_{Q_2 \rightarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q}{r^2}; \quad \vec{F}_{Q_3 \rightarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3 Q}{r^2}$$

$$\vec{F}_{Q_4 \rightarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_4 Q}{r^2}; \quad \vec{F}_{Q_5 \rightarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_5 Q}{r^2}; \quad \vec{F}_{Q_6 \rightarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_6 Q}{r^2}$$

Ya que todas las cargas son iguales,

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q$$

y la distancia del centro a cada vértice es igual a r , cada fuerza aportada por cada par tendrán la misma magnitud, pero dirección opuesta.

$\vec{F}_{Q_1 \rightarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2}$	$\vec{F}_{Q_2 \rightarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2};$	$\vec{F}_{Q_3 \rightarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2}$
$\vec{F}_{Q_4 \rightarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2}$	$\vec{F}_{Q_5 \rightarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2};$	$\vec{F}_{Q_6 \rightarrow Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2}$

Al examinar la figura 1.8b, se observa que:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_4 \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_5 \quad \vec{F}_3 = -\vec{F}_6 \text{ los vectores fuerzas se anulan por pares}$$

1.3 Distribuciones continuas de cargas

Hasta ahora hemos estudiados la interacción entre cargas puntuales. Ahora, vamos a extender la ley de Coulomb a una distribución continua y discreta de descargas.

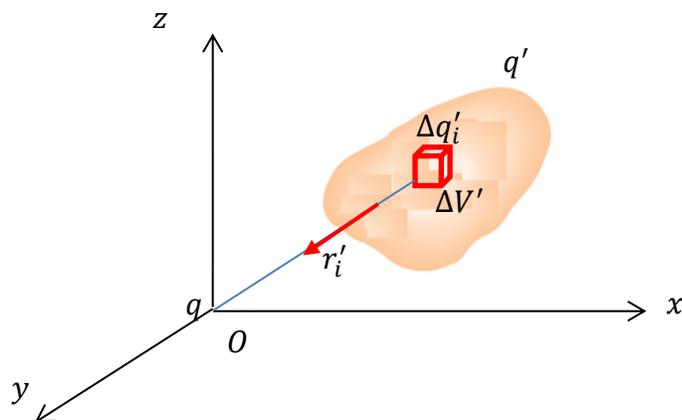


Figura 1.10 Distribución de carga continua q' que ejerce una fuerza sobre una carga puntual q , colocada en el origen de un sistema de coordenadas x, y, z .

La fuerza ejercida por la carga $\Delta q'_i$ contenida en el volumen infinitesimal $\Delta V'$ sobre la carga puntual q que está a una distancia r' de la distribución continua, de acuerdo a la ley de Coulomb es

$$\Delta \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q'_i q}{r'^2} \hat{r}' \quad (1.6)$$

Si la distribución tiene carga distribuida en todo su volumen, y la misma no es constante, entonces

$$\Delta q'_i = \rho(r') \Delta V' \quad (1.6)$$

Donde $\rho(r')$ es la densidad de carga por unidad de volumen. La fuerza $\Delta \vec{F}$ es

$$\Delta \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(r') \Delta V' q}{r'^2} \hat{r}' \quad (1.7)$$

La fuerza neta que ejerce la distribución de carga sobre la carga puntual q es la suma de cada elemento infinitesimal $\Delta q'_i$

$$\begin{aligned} \sum_i \Delta \vec{F}_i &= \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(r') \Delta V' q}{r'^2} \hat{r}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\rho(r') \Delta V'}{r'^2} \hat{r}' \\ \sum_i \Delta \vec{F}_i &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\rho(r') \Delta V'}{r'^2} \hat{r}' \end{aligned} \quad (1.8)$$

En el límite cuando se fragmenta la distribución en pedazos más y más pequeños ($\Delta V' \rightarrow 0$),

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\Delta V' \rightarrow 0} \sum_i \frac{\rho(r') \Delta V'}{r'^2} \hat{r}' \quad (1.9)$$

La suma \sum_i se puede reemplazar por una integral, y $\Delta V'$ por un dV' ,

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r') dV'}{r'^2} \hat{r}' \quad (1.10)$$

Para una distribución de carga en línea (como la de una varilla de plástico cargada, larga y delgada), usamos λ (letra griega lambda) para representar la densidad lineal de carga (carga por unidad de longitud dl' , medida en C/m). Cuando la carga está distribuida sobre una superficie (como la superficie del tambor formador de imágenes de una impresora láser), se

usa σ (sigma) para representar la densidad superficial de carga (carga por unidad de área dA' , se mide en C/m^2). Y cuando la carga se distribuye en un volumen dV' , se usa (ρ) para representar la densidad volumétrica de carga (carga por unidad de volumen, C/m^3).

Distribución de carga lineal

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(r')dl'}{r'^2} \hat{r}' \quad (1.11)$$

Y si la densidad lineal de carga es uniforme,

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl'}{r'^2} \hat{r}' \quad (1.12)$$

Distribución de carga superficial

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r')dS'}{r'^2} \hat{r}' \quad (1.13)$$

Y si la densidad superficial de carga es uniforme,

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS'}{r'^2} \hat{r}' \quad (1.14)$$

Distribución de volumétrica

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')dV'}{r'^2} \hat{r}' \quad (1.15)$$

Y si la densidad volumétrica de carga es uniforme,

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV'}{r'^2} \hat{r}' \quad (1.16)$$

Ejemplo 1.9 Fuerza que ejerce un anillo de carga sobre una carga puntual

Calcular la fuerza que ejerce un anillo cargado uniformemente con carga total Q sobre una carga puntual q , colocada en el eje (Figura). El radio del anillo es R , y q está a una distancia L del centro del anillo.

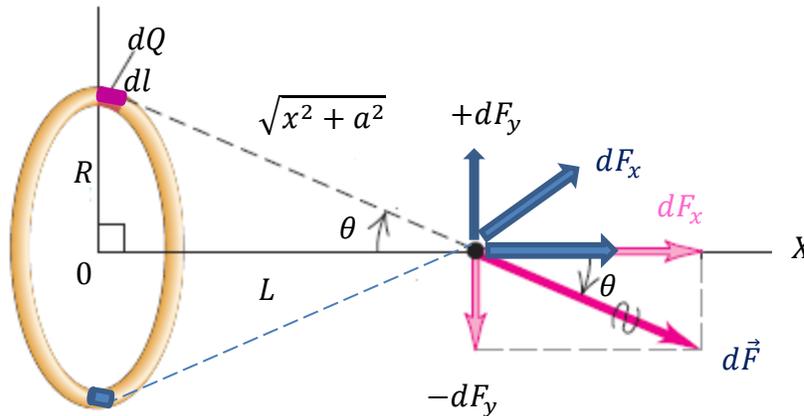


Figura 1.11 Nuestro esquema

Planteamiento: El punto del campo se localiza de manera arbitraria sobre el eje X , como se indica en la figura. La incógnita es la fuerza eléctrica en ese punto, expresado en función de la coordenada x .

El cálculo de \vec{F} se simplifica mucho debido a que el punto P del campo se ubica sobre el eje de simetría del anillo. En un primer caso, cada segmento de longitud dl , que contiene una carga dQ , le corresponde otro en el lado opuesto, produciendo en cada punto una fuerza dF_y sobre el eje X (punto P) que se anula con la otra. En el caso de la componente dF_x , cada segmento sobre el anillo contribuye a uno, todos apuntando hacia la derecha.

Entonces

$$dF_x = dF \cos(\theta)$$

Donde, la magnitud de dE es

$$dF = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r'^2} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r'^2}$$

Donde de la figura observamos que

$$r'^2 = L^2 + R^2 \quad \cos(\theta) = \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}}$$

Al sustituir

$$dF_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{(x^2 + R^2)} \frac{L}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L dl}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Al integrar

$$\int_{F_x} dF_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{(L^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi R} dl$$

$$F_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{(L^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} (2\pi R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2\pi R \lambda) L}{(L^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{QL}{(L^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Recordemos que } \lambda = \frac{Q}{2\pi R} \Rightarrow Q = 2\pi R \lambda$$

En forma vectorial

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{(L^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} \quad (1.17)$$

Nuestro resultado para demuestra que en el centro del anillo ($L = 0$), la fuerza es igual a cero, lo que era de esperarse: las cargas en los lados opuestos del anillo empujarían en direcciones opuestas a una carga de prueba que se situara en el centro, y la suma de las fuerzas sería cero.

Ahora si consideramos, el caso donde el punto P esta muy lejos, es decir $L \gg R$ (a es despreciable con respecto a L). En ese punto observaríamos el aro como un punto, donde toda su carga esta concentrada en dicho punto,

Entonces

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{(L^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{i} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{L}{L^3} \hat{i} \quad \Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{L^2} \hat{i}$$

Que era el resultado esperado para una carga puntual.