Fuerza electromotriz

La figura 5.12 muestra un circuito sencillo formado por un alambre (resistencia) conectado a una batería, la dirección de la corriente, es por convención, la dirección del flujo de cargas positivas. La corriente que circula por el circuito será constante, mientas la "fuerza" de la batería y la resistencia del alambre permanezcan constante. En tal sentido, la batería debe efectuar trabajo sobre las cargas para mantenerlas moviéndose en torno al circuito. Si una carga positiva, esta al principio en el punto P, en una terminal de la batería, esa carga, impulsada por el campo eléctrico, se moverá a lo largo del alambre.

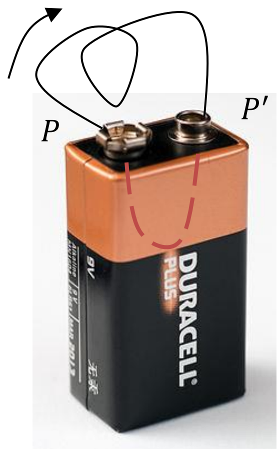


Figura 5.12 Un alambre resistivo conectado a las terminales de una batería. La energía potencial de una carga (positiva) es alta, cuando está en la terminal positiva P de la batería. La energía potencial decrece en forma gradual a medida que la carga recorre el alambre hacia la terminal negativa P'. Después, la energía potencial vuelve a aumentar a medida que la carga atraviese la batería (línea interrumpida), de P' a P.

En promedio, la energía cinética que gane la carga en el campo eléctrico, se disipa por fricción debido a las colisiones en el interior del alambre, y la carga llegará al punto P' en la otra terminal de la batería, con energía cinética no mayor a la que tenía originalmente. Así, en promedio la energía cinética no cambia, pero la energía potencial de la carga si, debido a que el potencial eléctrico decrece uniformemente con la distancia a lo largo del alambre, y la carga llegará al punto P' con una energía potencial menor que su energía potencial original. Para mantener el flujo de corriente, la batería debe "bombear" la carga, desde la terminal de bajo potencial a la terminal de alto potencial; es to es, la batería debe suministrar energía potencial eléctrica a la carga.

Para caracterizar la **"fuerza"** de la energía potencial eléctrica, se usa el concepto de fuerza electromotriz o *fem*, La fem de una fuente de energía potencial eléctrica se define como la cantidad de energía eléctrica que entrega la fuente, por Coulomb de carga positiva, para que esa carga pase por la fuente desde la terminal de bajo potencial a la terminal de alto potencial.

Téngase en cuenta que la "fuerza" electromotriz no es una fuerza, sino una energía por coulomb; el engañoso nombre fue asignado hace tiempo, cuando todavía no se hacía una clara distinción entre fuerza y energía. Como las unidades de *fem* son voltios, a la *fem* se le llama simplemente voltaje o tensión de la fuente.

Si una corriente constante e independiente del tiempo lleva un coulomb de carga en torno al circuito de la figura 5.12, de P a P' por el alambre, y de P' a P por la fuente de *fem*, la energía que recibe esa carga de la fuente de *fem* debe ser exactamente igual a la energía que pierde en el interior del alambre. En ese caso, la carga regresa a su punto de partida exactamente con la misma energía que tenía al principio, y puede repetir ese viaje redondo una y otra vez, exactamente de la misma manera. Este balance de energía se escribe como sigue:

$$V_{\varepsilon} + \Delta V = 0 \qquad 5.16$$

Donde V_{ε} representa la *fem*, o aumento de energía potencia por coulomb de carga debido a la fuente, y ΔV representa el cambio de energía potencial a lo largo del alambre (en este caso, V_{ε} es positiva y ΔV es negativa, como se muestra en la figura 5.13).

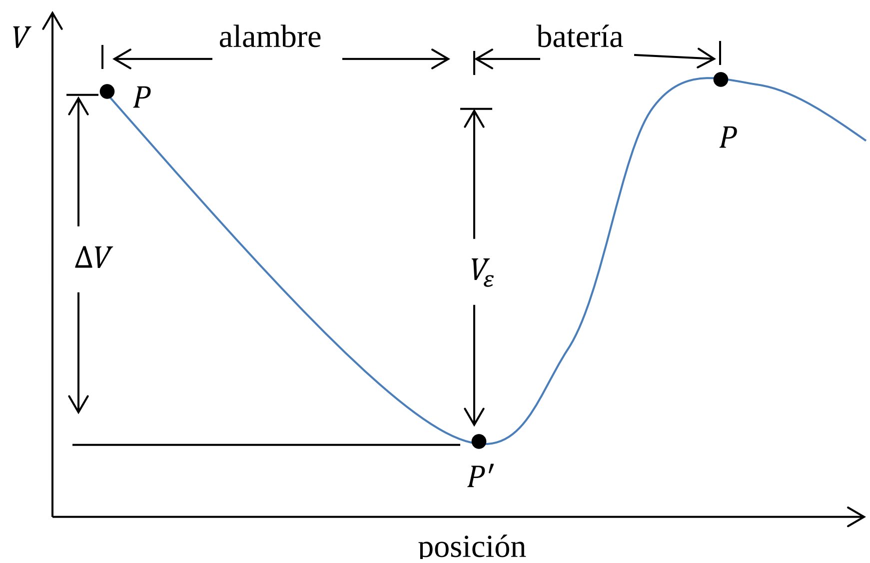


Figura 5.13 Grafica del potencial eléctrico, o energía potencial por coulomb de carga, en función de la posición a lo largo del conductor, para el circuito1. El potencial es máximo en el punto P (el polo positivo de la batería) y mínimo en el punto P' (polo negativo).

Resistencia interna

Las fuentes reales de *fem* en un circuito no se comportan exactamente del modo descrito; la diferencia de potencial a través de una fuente real en un circuito no es igual a la *fem*

$$V_{\varepsilon} = \Delta V \qquad 5.17$$

La razón es que la carga en movimiento a través del material de cualquier fuente real encuentra una resistencia, a la que llamamos resistencia interna de la fuente, y se denota con r. Si esta resistencia se comporta de acuerdo con la ley de Ohm, r es constante e independiente de la corriente I. Conforme la corriente avanza a través de r, experimenta una caída de potencial asociada que es igual a Ir. Así, cuando una corriente fluye a través de una fuente del terminal negativo P' a la terminal positiva P, la diferencia de potencial ΔV entre las terminales es

$$\Delta V = V_{\varepsilon} - Ir \qquad 5.18$$

El potencial ΔV, llamado voltaje terminal, es menor que la *fem* a causa del término Ir que representa la caída de potencial a través de la resistencia interna r.

Fuentes de fuerza electromotriz

Baterías

Las baterías convierten energía química en energía eléctrica. Un tipo muy común de batería es el acumulador plomo-ácido, que se usa mucho en automóviles. Otra clase conocida de batería es la pila seca o pila de linterna.

Generadores eléctricos

Los generadores eléctricos convierten energía mecánica (energía cinética) en energía eléctrica.

Celdas de combustible

Las celdas de combustible se parecen a las baterías, porque convierten energía química en energía eléctrica. Sin embargo, a diferencia de una batería, ni las sustancias con alta energía ni los productos de baja energía se guardan dentro de una celda de combustible. En esencia, la celda de combustible funciona como una cámara de combustión, donde se efectúa una reacción química controlada

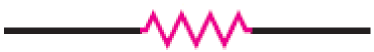
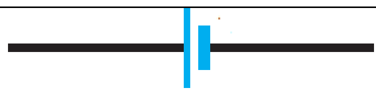
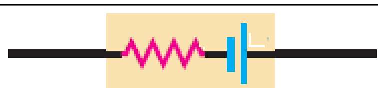
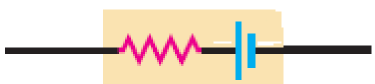
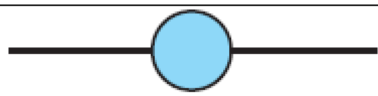
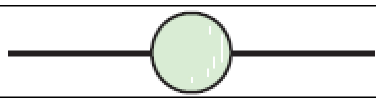
Celdas solares

Las celdas solares convierten directamente la energía de la luz solar en energía eléctrica. Están formadas por delgadas obleas de un semiconductor, como el silicio.

Símbolos para diagramas de circuito

Una parte importante del análisis de un circuito consiste en realizar el diagrama del circuito. La tabla 5.2 muestra los símbolos usuales que se emplean en los diagramas de circuito. En este capítulo y en el siguiente se usarán mucho estos símbolos. Por lo general se supone que los alambres que conectan los diversos elementos del circuito tienen una resistencia despreciable.

Tabla 5.2 . Símbolos para diagramas de circuito

	Conductor con resistencia despreciable
	Resistor
	Fuente de fem (la línea vertical más larga representa la terminal positiva, por lo general aquélla con el mayor potencial).
	Fuente de fem con resistencia interna r
	Fuente de fem con resistencia interna r
	Voltímetro (mide la diferencia de potencial entre sus terminales).
	Amperímetro (mide la corriente que pasa a través suyo).

Los medidores ideales que se colocan en un circuito, ya sea para medir corriente o voltaje no interfieren con el circuito al cual se conectan. Por ejemplo, un voltímetro, mide la diferencia de potencial entre sus terminales; un voltímetro idealizado tiene una resistencia infinitamente grande y mide la diferencia de potencial sin tener que desviar ninguna corriente a través él. Un amperímetro mide la corriente que pasa a través de él; un amperímetro idealizado tiene resistencia igual a cero y no hay diferencia de potencial entre sus terminales.

Energía y potencia en circuitos eléctricos

En los circuitos eléctricos es más frecuente que interese la rapidez con la que la energía se proporciona a un elemento de circuito o se extrae de él. La relación de transferencia de energía por unidad de tiempo es la potencia, y se denota mediante P; por lo tanto, escribimos

$$P = VI \tag{5.19}$$

P, representa la rapidez con la que se entrega energía a un elemento de circuito o se extrae de éste.

La unida en SI es $V \times A = Watts = W$

Potencia en una resistencia pura

Si el elemento de circuito es un resistor, la diferencia de potencial es $\Delta V = IR$. La potencia eléctrica entregada al resistor por el circuito es

$$P = \Delta V \times I = I^2 R = \frac{\Delta V^2}{R} \tag{5.20}$$

Potencia de salida de una fuente

Consideremos ahora el caso, donde una fuente le suministra energía un elemento, como por ejemplo, el caso de la batería de un automóvil conectada a uno de los faros, tal como se ilustra en la figura 5.14.

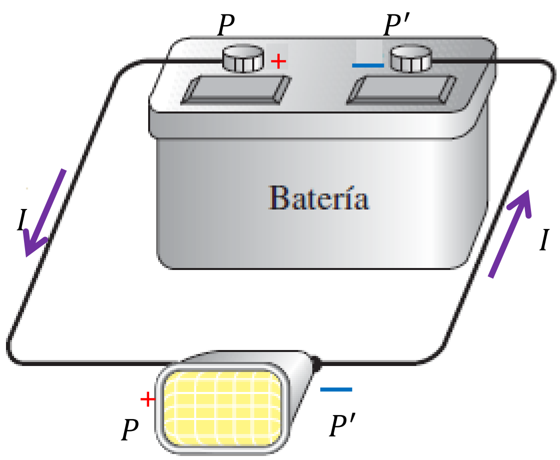


Figura 5.14 Circuito de corriente del encendido de un faro para vehículo

El punto P está a un potencial mayor que el P', por lo que $V_P > V_{P'}$, y ΔV es positivo. Observe que la corriente I sale de la fuente por la terminal de mayor potencial (en vez de entrar por ahí). Se provee energía al circuito externo, y la rapidez con la que se entrega al circuito está dada por

$$P = \Delta V \times I$$

Pero

$$\Delta V = V_\varepsilon - Ir$$

Entonces

$$P = (V_\varepsilon - Ir)I$$

$$P = V_\varepsilon I - I^2 r \qquad 5.21$$

$V_\varepsilon I$, se interpreta como la tasa a la que realiza trabajo sobre las cargas en circulación cualquier agente que ocasione la fuerza no electrostática en la fuente. Este término representa la rapidez de conversión de la energía no eléctrica en eléctrica dentro de la fuente. El término I^2r, es la tasa a la que se disipa energía eléctrica en la resistencia interna de la fuente.

Potencia de entrada a una fuente

Consideremos ahora el caso opuesto, al considerado anteriormente. La corriente I en el circuito es opuesta a la de la figura 5.12; la fuente inferior empuja corriente de regreso hacia la fuente superior. En virtud de esta inversión de la corriente,

$$P = V_\varepsilon I + I^2 r$$

En vez de que el agente que genera la fuerza no electrostática de la fuente superior realice trabajo, se está realizando trabajo sobre el agente. Esto es lo que pasa cuando se conecta una batería recargable (de almacenamiento) a un cargador. El cargador suministra energía eléctrica a la batería; parte de esta energía se convierte en energía química que se reconvierte después, y el resto se disipa (se pierde) en la resistencia interna de la batería, la calienta y origina un flujo de calor hacia fuera. Si usted tiene algún aparato o computadora portátil con batería recargable, tal vez haya notado que se calienta mientras se está cargando.

La energía que pierden las cargas durante su paso por un resistor genera energía térmica, es decir, genera energía cinética y potencial, microscópica y desordenada, en los átomos del resistor. La conversión de energía eléctrica y térmica en un resistor se llama **calentamiento Joule**.

Muchos electrodomésticos simples, como tostadores, calentadores, parrillas, planchas, lámparas, se basan en el calentamiento de Joule (figura 5.15). Algunos electrodomésticos basados en el calentamiento Joule: a) Cocina eléctrica, b) Plancha, c) foco incandescente.

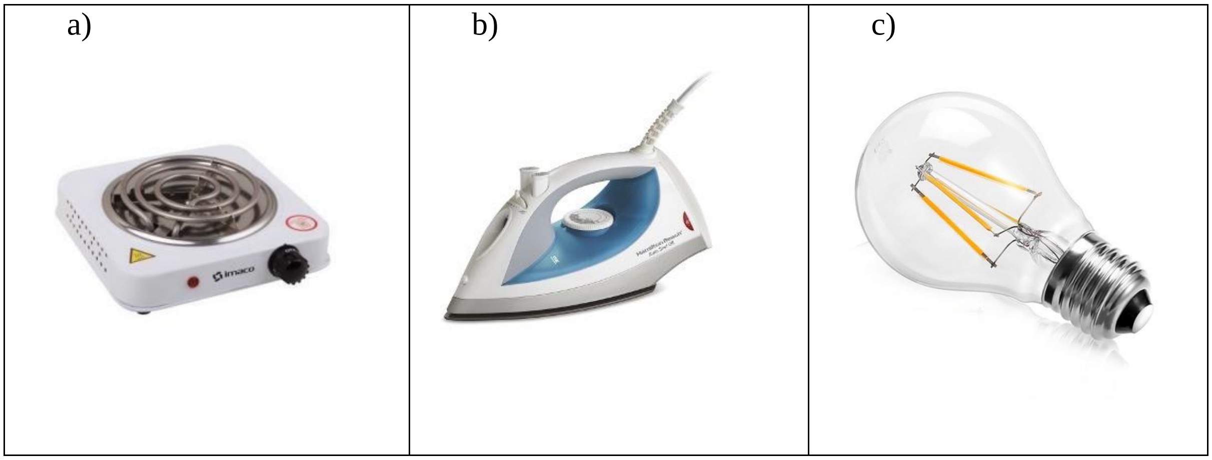


Figura 5.15 Aparatos electrodomésticos.

Circuitos de una malla

Los circuitos eléctricos en los automóviles y en herramientas o electrodomésticos accionados por baterías, como taladros eléctricos, linternas de mano, computadoras portátiles y teléfonos portátiles, contienen una o varias baterías u otras fuentes de fem conectados mediantes conductores a lámparas, motores eléctricos, pantallas, etc. Estos aparatos se pueden representar en diagramas de circuitos eléctricos mediante sus resistencias.

Comenzaremos con circuitos simples, formados por una malla. En cualquier circuito de una malla sólo hay una trayectoria, y entonces la misma corriente pasa por cualquier punto en una malla simple.

La figura 5.16 muestra un diagrama eléctrico de uno de esos circuitos de una malla, formado por una fuente de *fem*, que puede ser una batería, conectada a un resistor. La *fem* de la batería es V_ε, y la resistencia del resistor es R.

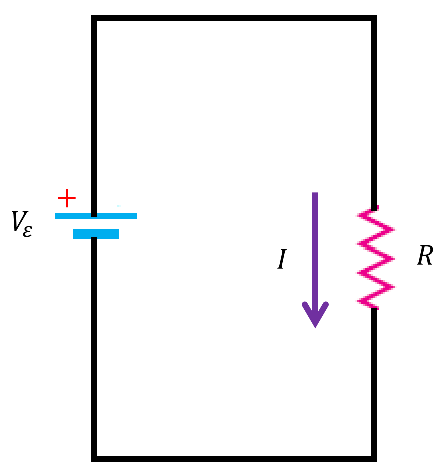


Figura 5.16 Un circuito simple con una fuente de fem y un resistor

Para calcular la corriente que pasa por el circuito se observa que, de acuerdo a la ley de Ohm, el cambio de potencial s través del resistor debe ser,

$$V_\varepsilon = -\Delta V \tag{5.22}$$

Aquí, se ha considerado el cambio de potencial en la dirección de la flecha (Figura), del extremo superior al inferior del resistor. El signo negativo en el lado derecho de la ecuación indica que, para una carga positiva que recorra el circuito en la dirección de la flecha, el potencial decrece a través del resistor. Entonces, por conservación de la energía, la fem mas el cambio de potencial debe ser igual a cero; entonces

$$V_\varepsilon - IR = 0 \tag{5.23}$$

$$I = \frac{V_\varepsilon}{R} \tag{5.24}$$

La ecuación (5.23) es un caso de la **regla de voltaje de Kirchhoff**, que estable que cuando se recorre cualquier malla cerrada en un circuito, la suma de todas las fem y todos los cambios de potencial a través de resistores y demás elementos del circuito debe ser igual a cero.

Ejemplo 5.3 **Fuente en un circuito completo**

Sea el siguiente circuito, Figura 5.17 ¿Cuáles son ahora las lecturas del voltímetro y del amperímetro?

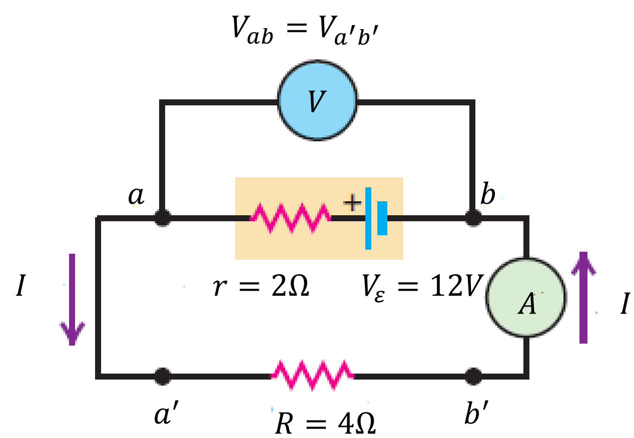


Figura 5.17 Fuente de fem en un circuito completo.

Planteamiento: La primera variable que se busca es la corriente I a través del circuito $aa'b'b$ (igual a la lectura del amperímetro). La segunda es la diferencia de potencial $\Delta V = V_a - V_b$ (igual a la lectura del voltímetro).

a) la corriente a través del circuito $aa'b'b$

$$I = \frac{V_\varepsilon}{r+R} \quad \Rightarrow I = \frac{12V}{2\Omega + 4\Omega} \qquad \Rightarrow I = 2A$$

b) El voltaje en la resistencia R y en la fuente

Voltaje en la resistencia R.

De acuerdo a la relación de Ohm

$$V_{a'b'} = RI \quad \Rightarrow V_{a'b'} = 4\Omega \times 2\text{A} \qquad \Rightarrow V_{a'b'} = 8V$$

Voltaje en la fuente

De acuerdo a la relación de Ohm

$$V_{ab} = V_\varepsilon - Ir \quad \Rightarrow V_{ab} = 12V - 2\Omega \times 2\text{A} \ \Rightarrow V_{ab} = 8\text{V}$$

Ejemplo 5.4 **Potencias de alimentación y salida en un circuito completo**

Sea Para la situación que se analizó en el ejemplo anterior, calcule la tasa de conversión de energía (química o eléctrica) y la tasa de disipación de energía en la batería, así como la potencia neta de salida de la batería.

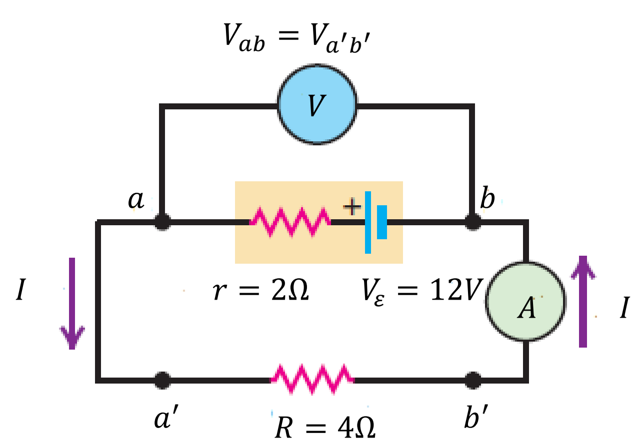


Figura 5.18 Diagrama para este problema.

Planteamiento: Las variables que se buscan son la potencia de salida de la fuente de *fem*, la potencia de alimentación a la resistencia interna y la potencia neta de salida de la fuente.

a) tasa de conversión de energía (química o eléctrica)

Del ejemplo anterior, $I = 2A$, entonces,

$$P = V_\varepsilon I \qquad \Rightarrow P = 12V \times 2A \qquad \Rightarrow P = 24W$$

b) tasa de disipación de energía en la batería

$$p = I^2 r \quad \Rightarrow P = (2A)^2 \times 2\Omega \quad \Rightarrow P = 8W$$

c) potencia neta de salida de la batería

La potencia eléctrica de salida de la fuente es la diferencia entre

$$VI - I^2 r = 24W - 8W = 16W$$

Ejemplo 5.5 **Combinaciones en serie contra combinaciones en paralelo**

Dos bombillas idénticas se conectan a una fuente con $V_\varepsilon = 8V$ y resistencia interna despreciable. Cada bombilla tiene una resistencia $R = 2\Omega$. Calcule la corriente a través de cada bombilla, la diferencia de potencial a través de ésta y la potencia que se le entrega, y haga lo mismo para toda la red si las bombillas están conectadas a) en serie y b) en paralelo. c) Suponga que una de las bombillas se funde, es decir, su filamento se rompe y la corriente ya no puede fluir a través de él. ¿Qué pasa con la otra bombilla, para el caso de conexión en serie? ¿Y en el de conexión en paralelo?

Planteamiento: Las bombillas son resistores conectados en serie y en paralelo.

a) La figura 5.19, muestra el esquema del circuito formado por la fuente y las bombilla en serie

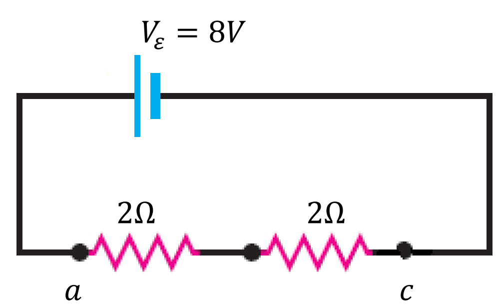
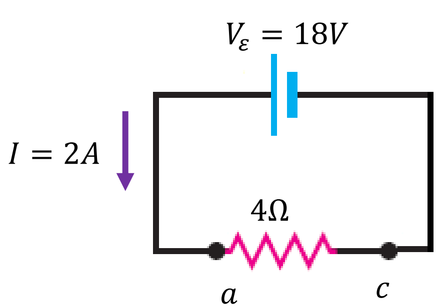
	$R_{ac} = 2\Omega + 2\Omega \Rightarrow R_{ac} = 4\Omega$
	De la relación de Ohm $V_\varepsilon = R_{ac}\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{V_\varepsilon}{R_{ac}} = \frac{8V}{4\Omega} \Rightarrow \mathrm{I} = 2\mathrm{A}$

Figura 5.19 Esquema del circuito formado por la fuente y las bombilla en serie

Como las bombillas tienen la misma resistencia, la diferencia de potencial es la misma a través de cada una:

$$V_{ab} = IR_{ab} = IR_{bc} = 2A \times 2\Omega = 4V$$

la potencia entregada a cada bombilla es

$$P = V_{ab}I = 4V \times 2A = 8W$$

La energía total entregada a las dos bombillas

$$P_T = I^2 R_T$$

$$P_T = (2A)^2 4\Omega = 16W \qquad \text{o}$$

$$P_T = 2P = 2 \times 8W = 16W$$

La figura 5.12, muestra el esquema del circuito formado por la fuente y las bombillas en paralelo

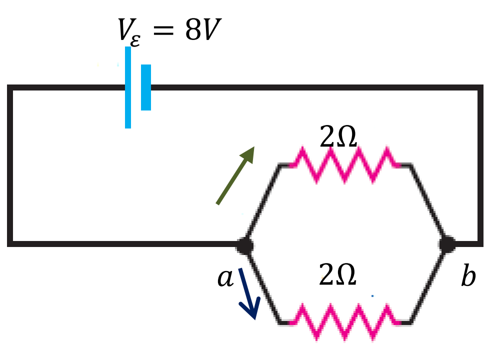
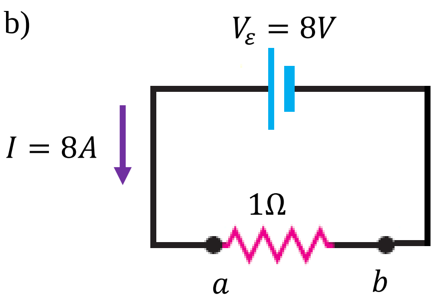
a)  	$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2}$ $\frac{1}{R_{ab}} = \frac{2}{2} \Rightarrow R_{ab} = \frac{2}{2} = 1\Omega$
b)  	De la relación de Ohm $V_\varepsilon = R_{ab}\mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{V_\varepsilon}{R_{ab}} = \frac{8V}{1\Omega} \quad \Rightarrow \mathrm{I} = 8\mathrm{A}$

Figura 5.20 Esquema del circuito formado por la fuente y las bombilla en paralelo

Como las bombillas tienen la misma resistencia, la diferencia de potencial es la misma a través de cada una:

$$V_{ab} = IR_{ab} = IR_{ab} = 8A \times 1\Omega = 8V$$

Se tiene que la corriente que circula por cada una de ellas es la misma.

$$I_{2\Omega} = \frac{V_{ab}}{R_{2\Omega}} = \frac{8V}{2\Omega} = 4A$$

La potencia entregada a cada bombilla es

$$P = V_{ab}I = 8V \times 4A = 32W$$

La energía total entregada a las dos bombillas

$$P_T = I^2 R_T$$

Donde $R_T = R_{ab} = 1\Omega$

Entonces

$$P_T = (8A)^2 1\Omega = 64W$$

En el caso de la configuración en serie, fluye la misma corriente a través de las dos bombillas. Si una de éstas se fundiera no habría corriente en todo el circuito, y ninguna bombilla brillaría. En el caso en paralelo, la diferencia de potencial a través de cualquier bombilla permanecería igual a $8V$, aun si una de las bombillas se fundiera. De ahí que la corriente a través de la bombilla en funcionamiento sería igual a $4A$, y la potencia entregada a esa bombilla seguiría igual a $32W$, como antes de que la bombilla se fundiera. Ésta es otra ventaja de un arreglo en paralelo de bombillas: si una de ellas falla, las demás no se ven afectadas. Este principio se utiliza en los sistemas de distribución domésticos,

Comentarios: Cuando se conectan a la misma fuente, dos bombillas en serie consumen menos potencia y brillan menos que si se conectan en paralelo.

Ejemplo 5.6 **Circuito de una malla con dos baterías**

La figura 5.21a muestra un circuito con dos baterías, y dos resistores. Las *fem* de las baterías son $V_{\varepsilon_1} = 12.0V$ y $V_{\varepsilon_2} = 15.0V$; las resistencias son $R_1 = 4.0\Omega$ y $R_2 = 2.0\Omega$. ¿Cuál es la corriente en el circuito?

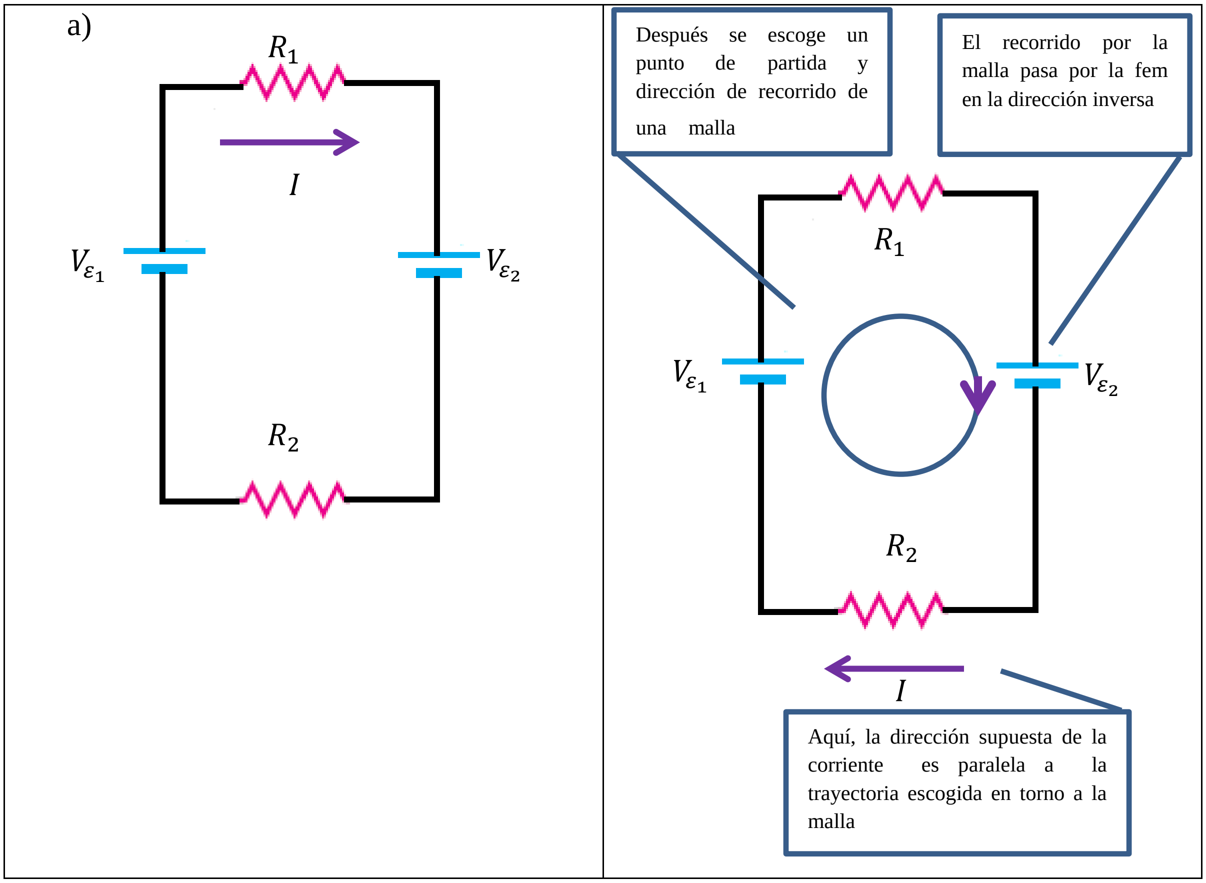


Figura 5.21 a) Dos fuentes de fem y dos resistores. b) Las mismas fuentes de fem y los mismos resistores, habiendo elegido una trayectoria para aplicar la regla de voltaje de Kirchhoff.

$$V_{\varepsilon_1} - R_1 I - V_{\varepsilon_2} - R_2 I = 0$$

$$V_{\varepsilon_1} - V_{\varepsilon_2} = I(R_1 + R_2) \qquad \Rightarrow \; I = \frac{V_{\varepsilon_1} - V_{\varepsilon_2}}{R_1 + R_2} = \frac{12V - 15V}{4\Omega + 2\Omega} = -0.5A$$

En este caso, el signo negativo indica que la corriente no va con las manecillas del reloj, como se definió originalmente, sino en contra de las manecillas.

Circuitos con varias mallas

Regla de Kirchhoff de las uniones: la suma algebraica de las corrientes en cualquier unión es igual a cero. Es decir,

$$\sum I = 0 \quad 5.25$$

La corriente total que entra a un nodo es igual a la corriente total que sale del nodo. Esta regla afirma que no se acumula carga en los nodos, solo pasa por ellas. La regla de las uniones se basa en la conservación de la carga eléctrica. En una unión no se puede acumular carga eléctrica, por lo que la carga total que entra a ella por unidad de tiempo debe ser igual a la carga total que sale por unidad de tiempo (véase la figura $(5.22b)$). Entonces,

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad 5.26$$

Regla de Kirchhoff de las espiras: la suma algebraica de las diferencias de potencial en cualquier espira, incluso las asociadas con las fem y las de elementos con resistencia, debe ser igual a cero. Es decir,

$$\sum V = 0 \quad 5.27$$

La regla de las espiras es el enunciado de que la fuerza electrostática es conservativa. Suponga que recorre una espira y mide las diferencias de potencial entre los extremos de elementos sucesivos del circuito. Al regresar al punto de partida, debería de encontrar que la suma algebraica de esas diferencias es igual a cero; de lo contrario, no se podría afirmar que el potencial en ese punto tiene un valor definido.

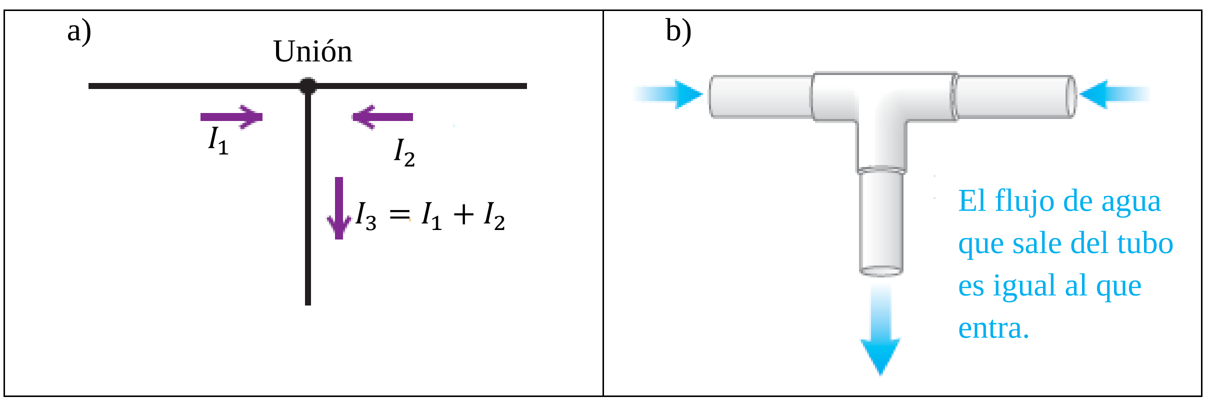


Figura 5.22 a) Regla de Kirchhoff de las uniones, b) Analogía de la tubería de agua para la regla de Kirchhoff de las uniones.

Convenciones de signo para la reglas Kirchhoff

Regla de corriente de Kirchhoff

Las corrientes que llegan a un nodo se consideran positivas y las que sale son negativas. En la figura a, observamos que I_1 e I_2 son positivas, pues están llegando al nodo. Entonces la corriente que sale del nodo por tanto es la suma algebraica de estas corrientes con los signos establecidos por convención. En el caso de que la corriente, I_1 entrara e I_2 saliera, la corriente sería, $I_3 = I_1 - I_2$, manteniendo la convención de signos para las corrientes $522a$.

Regla de voltajes de Kirchhoff

Primero suponga un sentido de la corriente en cada ramal del circuito e indíquelo en el diagrama correspondiente. En seguida, a partir de cualquier punto del circuito, realice un recorrido imaginario de la espira sumando las *fem* y los IR conforme los encuentre.

Cuando se pasa a través de una fuente en la dirección de $-$ a $+$, la *fem* se considera positiva; cuando se va de $+$ a $-$, la *fem* se considera negativa (figura $5.23a$). Cuando se va a través de un resistor en el mismo sentido que el que se supuso para la corriente, el término IR es negativo porque la corriente avanza en el sentido del potencial decreciente. Cuando se pasa a través de un resistor en el sentido opuesto a la corriente que se supuso, el término IR es positivo porque representa un aumento de potencial (figura $5.23b$).

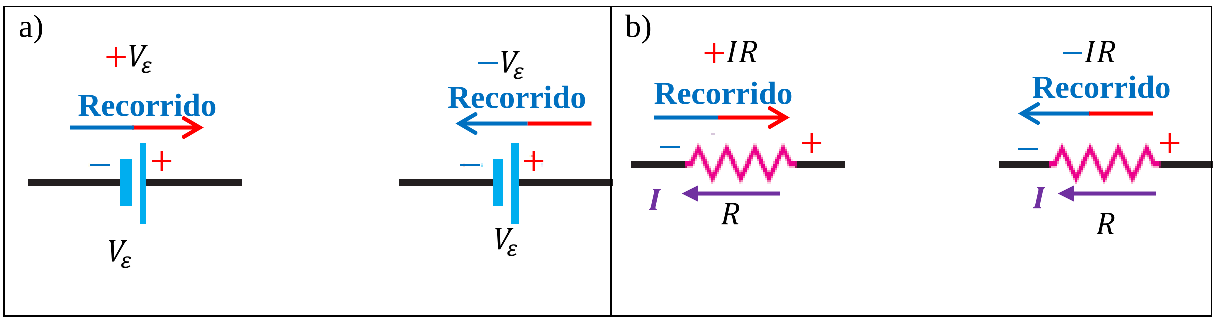


Figura 5.23 Uso de las convenciones de signos cuando se aplica la regla de Kirchhoff de las espiras. En cada parte de la figura "Recorrido" es el sentido en que imaginamos ir alrededor de la espira, que no necesariamente es el sentido de la corriente.

Las dos reglas de Kirchhoff son todo lo que se necesita para resolver una amplia variedad de problemas de redes. Por lo general, algunas de las fem, corrientes y resistencias son conocidas y otras no. Siempre se debe obtener de las reglas de Kirchhoff cierto número de ecuaciones independientes igual al número de incógnitas, de manera que sea posible resolverlas simultáneamente.

Por ejemplo, en la figura $5.24a$ se muestra un circuito complejo con varias espiras. Para cada espira se puede identificar la corriente, y escogerle una dirección, como se ve en la figura 1a. Para relacionar esas corrientes se puede aplicar la regla de corriente de Kirchhoff en varios nodos. También, el circuito tiene varias espiras, y se puede aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff a cualquiera de ellos: por ejemplo la espira rectangular (1) y dos mallas triangulares (1 y 2) en la figura $5.24b$. Después de haber escogido un punto de partida y una dirección arbitrarias para recorrer determinada espira, se suman los cambios de potencial para la la trayectoria en torno a la malla y se iguala a cero esa suma.

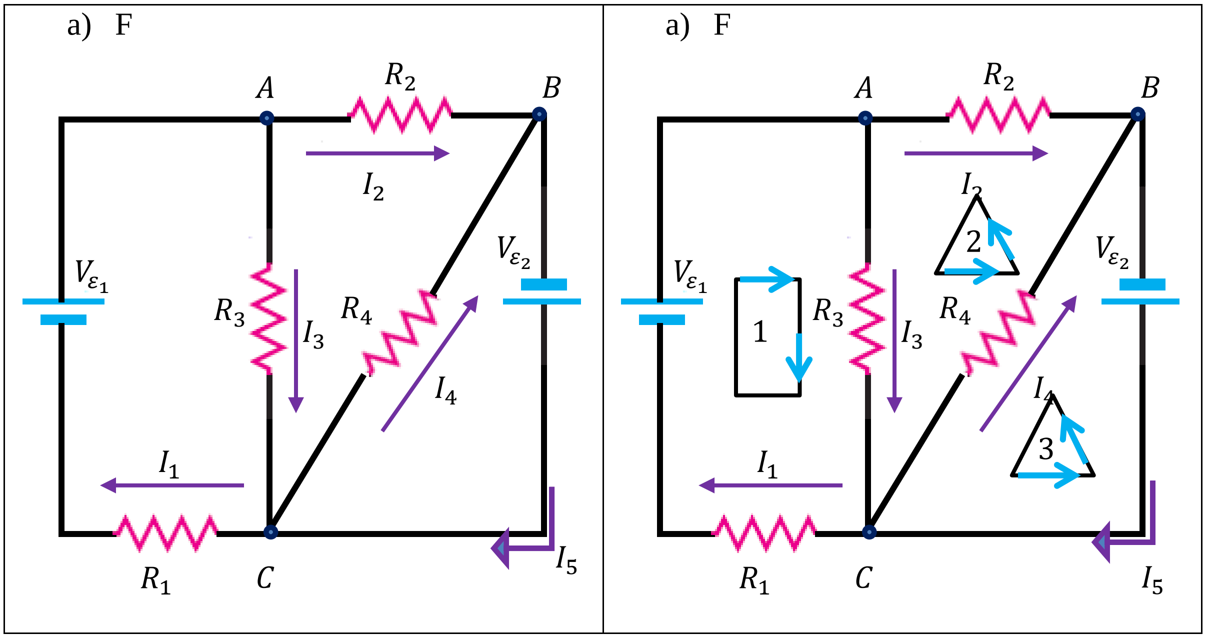


Figura 5.24 Un circuito con varias espiras. a) Circuito con sus cinco corrientes separadas. b) El miso circuito con tres mallas (1,2 y 3) identificadas

Ejemplo 5.7 Corrientes en circuitos de varias mallas

En el circuito de la figura 5.25, las *fem* son $V_{\varepsilon_1} = 12V$, $V_{\varepsilon_2} = 8V$, $R_1 = 4.00\Omega$, $R_2 = 4.00\Omega$ y $R_1 = 2.00\Omega$. Calcular la corriente en cada resistor.

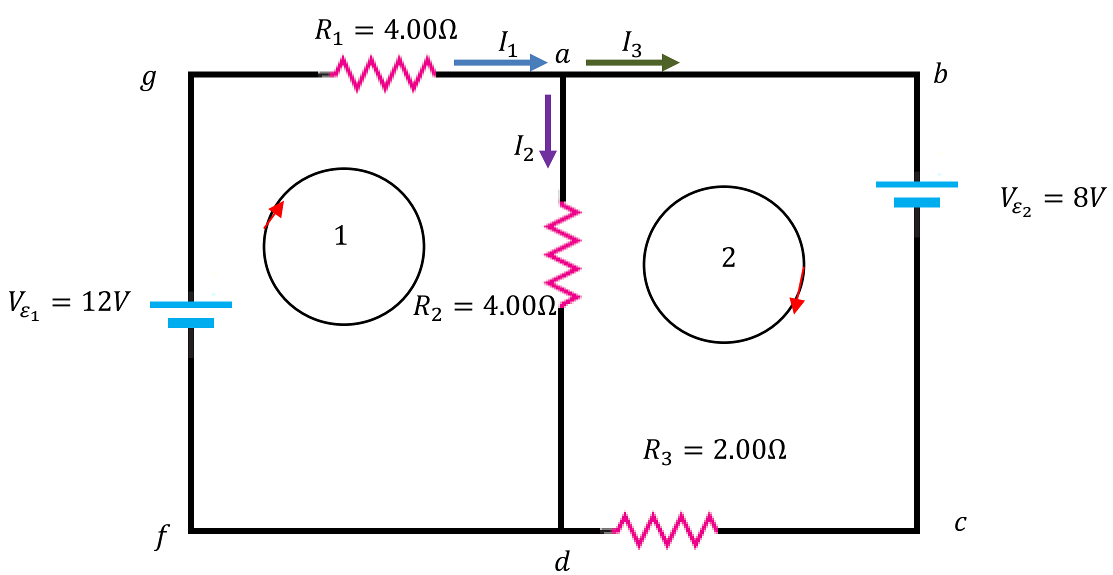


Figura 5.25 Circuito formado por dos mallas

Planteamiento: Primero, se identifican y se asignan direcciones a las corrientes desconocidas en el nodo de la parte central de la figura, el punto a (Véase la figura 5.25). Luego, se le asignan los sentidos a cada malla.

Solución

La regla de las corrientes de Kirchhoff, al aplicarse al nodo a, resulta,

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad 5.7a$$

Malla 1. Recorrido $adfga$

La fem se toma positiva, $+V_{\varepsilon_1}$ porque la trayectoria fue de la terminal $-$ a la $+$ de V_{ε_1}.

En este recorrido, la corriente I_1, atraviesa la resistencia R_1 en el mismo sentido de la malla, por tanto el producto $I_1 R_1$ es negativo, igualmente la corriente I_2 a traviesa la R_2 en el mismo sentido de la Malla, por tanto el $I_2 R_2$ también es negativo. Entonces la regla de los voltajes de Kirchhoff para este recorrido es

$$-I_1 R_1 - I_2 R_2 + V_{\varepsilon_1} = 0 \qquad 5.7b$$

Al sustituir los valores numéricos de R_1, R_2 y V_{ε_1} resulta

$$-4I_1 - 4I_2 + 12 = 0 \qquad 5.7c$$

Malla 2. Recorrido $abcda$

La fem se toma negativa, $-V_{\varepsilon_2}$ porque la trayectoria fue de la terminal $+$ a la $-$ de V_{ε_2}.

Para este recorrido, la corriente I_2, atraviesa la resistencia R_2 en sentido contrario al de la malla, por tanto el producto $I_1 R_1$ es positivo, mientras que la corriente I_3 a traviesa la R_3 en el mismo sentido de la Malla, por tanto el $I_3 R_3$ también es negativo. Entonces la regla de los voltajes de Kirchhoff para este recorrido es

$$+I_2 R_2 - I_3 R_3 - V_{\varepsilon_2} = 0 \qquad 5.7d$$

Al sustituir los valores numéricos de R_1, R_3 y V_{ε_2} resulta

$$+4I_2 - 2I_3 - 8 = 0 \qquad 5.7e$$

Ahora, las ecuaciones tenemos $5.7a$, $5.7c$ y $5.7e$ forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (corrientes, I_1, I_2 e I_3)

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad 5.7f$$

$$-4I_1 - 4I_2 + 12 = 0 \qquad 5.7g$$

$$+4I_2 - 2I_3 - 8 = 0 \qquad 5.7h$$

Este sistema puede resolverse por cualquier método analítico o numérico.

Podemos usar el método de sustitución para eliminar una de las incógnitas. Por ejemplo, eliminemos I_1 del sistema $(5.7f, 5.7g$ y $5.7h)$. Para ello despejemos, I_1 en la ecuación $(5.7f)$, y sustituyamos el resultado en la ecuación $(5.25g)$. Esto conduce a:

$$-4(I_2 + I_3) - 4I_2 + 12 = 0 \qquad 5.7i$$

Organizando términos en la ecuación $(5.7i)$ y simplificando, resulta

$$-8I_2 - 4I_3 + 12 = 0 \qquad 5.7j$$

En este punto hemos reducido el sistema a dos ecuaciones con dos incógnitas, resultando entonces

$$-8I_2 - 4I_3 + 12 = 0 \qquad 5.7k$$

$$+4I_2 - 2I_3 - 8 = 0 \qquad 5.7l$$

Nuevamente aplicamos el método de sustitución para eliminar una de las incógnitas, en este caso, despejemos I_2 en la ecuación $(5.7k)$

$$I_2 = \frac{-4I_3 + 12}{8} \qquad 5.7m$$

Ahora, sustituyamos el resultado en la ecuación $(5.7l)$

$$4\left(\frac{-4I_3 + 12}{8}\right) - 2I_3 - 8 = 0$$

$$-2I_3 + 6 - 2I_3 - 8 = 0 \quad \Rightarrow -4I_3 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \; I_3 = -\frac{1}{2}A$$

La corriente I_2 se obtienes sustituyendo el resultado de I_3 en la ecuación $(5.7m)$

$$I_2 = \frac{-4\left(-\frac{1}{2}\right) + 12}{8} = \frac{2 + 12}{8} \Rightarrow \quad I_2 = \frac{7}{4}A$$

Finalmente, la corriente I_1 ese puede obtener de la ecuación $(5.7a)$

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} = \frac{7-2}{4} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{5}{4}A$$

Las corrientes, son

$$I_1 = \frac{5}{4}A; \qquad I_2 = \frac{7}{4}A; \qquad I_3 = -\frac{1}{2}A$$

Comentarios: El signo positivo de I_2 significa que la corriente en esa malla en realidad es contraria a la dirección que se escogió en la figura 5.25.

Realmente lo laborioso en este tipo de circuitos que consta de más de una malla, es la cantidad de incógnitas (Corrientes) y de ecuaciones que resulten. En el circuito de la figura 5.25 al aplicar las dos reglas de Kirchhoff, resultaron tres ecuaciones con tres incógnitas, la primera de ellas se obtuvo aplicado la regla de las corrientes y las otras dos aplicando la regla de los voltajes de Kirchhoff. El resultado fue un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, el cual tiene solución única.

Es de esperar que si se incrementa el número de mallas, por ende debe aumente la cantidad de incógnitas, y para que el sistema tenga solución única, se deben plantear igual número de ecuaciones, tal como se procedió en el Ejemplo 5.7. En el ejemplo siguiente, vamos a resolver el mismo circuito del ejemplo 5.7, pero vamos a reducir el número de incógnitas.

Ejemplo 5.8 **Corrientes en circuitos de varias mallas, reduciendo la cantidad de incógnitas.**

En el circuito de la figura 5.26, las *fem* son $V_{\varepsilon_1} = 12V$, $V_{\varepsilon_2} = 8V$, $R_1 = 4.00\Omega$, $R_2 = 4.00\Omega$ y $R_1 = 2.00\Omega$. Calcular la corriente en cada resistor.

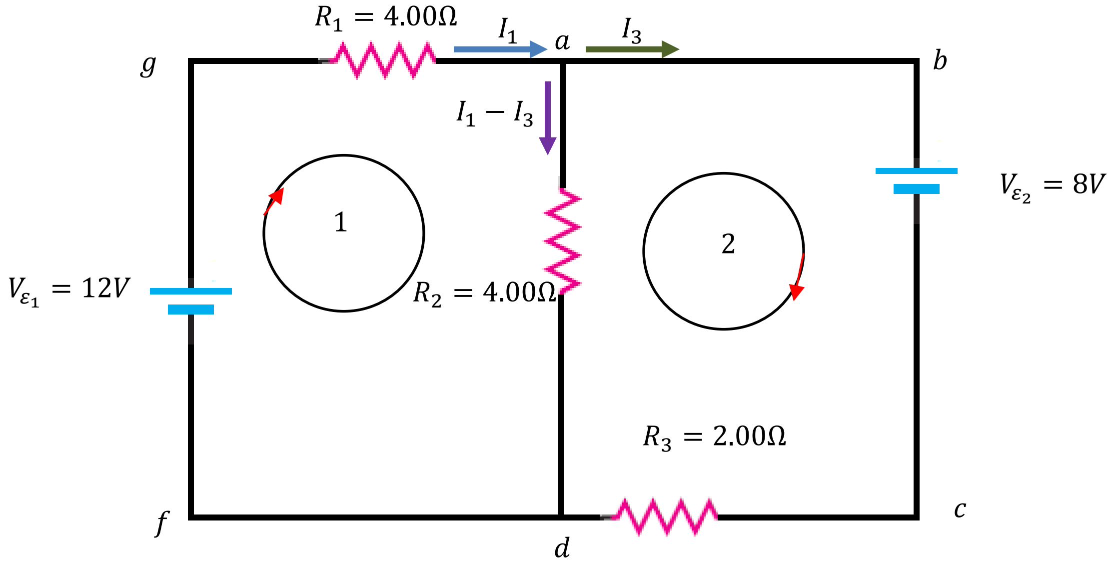


Figura 5.26 Circuito de dos mallas

Planteamiento: Tal y como se procedió en el ejemplo 5.6 , se identifican y se asignan direcciones a las corrientes desconocidas en el nodo de la parte central de la figura, y sentidos de cada malla. En este caso, en lugar de plantear I_2 como se hiciera, esta se representa como la diferencia de I_1 e I_3, puesto que de acuerdo a la convención de signos para las corrientes (sección), las corrientes que llegan a un nodo son positivas y las que salen de él son negativas, por ende

$$I_2 = I_1 - I_3 \qquad 5.8a$$

Luego escribimos las corrientes que circulan por cada malla como función de I_1 e I_3

Malla 1. Recorrido $adfga$

$$-I_1 R_1 - (I_1 - I_3) R_2 + V_{\varepsilon_1} = 0$$

$$-I_1 R_1 - I_1 R_2 + I_3 R_2 + V_{\varepsilon_1} = 0 \qquad 5.8b$$

Al sustituir los valores numéricos de R_1, R_3 y V_{ε_1} en la ecuación $(5.8a)$ resulta

$$-I4_1 - 4I_1 + 4I_3 + 12 = 0 \qquad -8I_1 + 4I_3 + 12 = 0 \qquad 5.8c$$

Malla 2. Recorrido $abcda$

$$+(I_1 - I_3)R_2 - I_3R_3 - V_{\varepsilon_2} = 0$$

$$I_1R_1 - I_3R_2 - I_3R_3 - V_{\varepsilon_2} = 0 \qquad 5.8d$$

Al sustituir los valores numéricos de R_2, R_3 y V_{ε_2} en la ecuación $(5.8d)$ resulta

$$4I_1 - 4I_3 - 2I_3 - 8 = 0$$

$$4I_1 - 6I_3 - 8 = 0$$

Tenemos ahora dos ecuaciones con dos incógnitas

$$-8I_1 + 4I_3 + 12 = 0 \qquad 5.8e$$

$$4I_1 - 6I_3 - 8 = 0 \qquad 5.8f$$

Usando el método de sustitución, las corrientes, son

$$I_1 = \frac{5}{4}A; \qquad I_2 = \frac{7}{4}A; \qquad I_3 = -\frac{1}{2}A$$

Comentarios: Es aconsejable en cualquier circuito reducir la cantidad de incógnitas, pues al hacer esto facilita la resolución del sistema resultante.

Ejemplo 5.9 **Puente de Wheatstone**

El puente de Wheatstone se usa para comparaciones precisas de una resistencia desconocida y referencias conocidas de resistencias. La figura, muestra un esquema de un puente de Wheatstone.

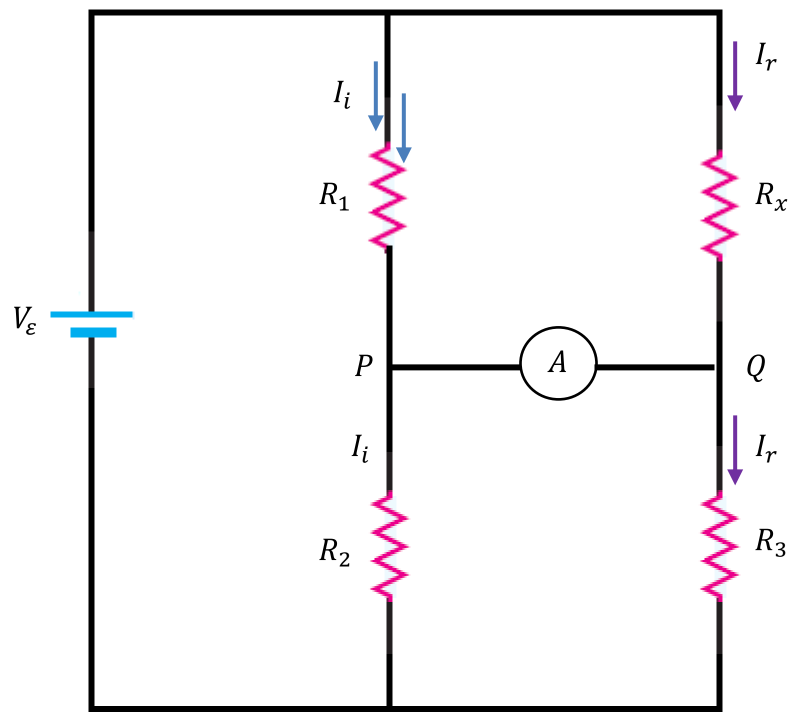


Figura 5.27 Esquema de un puente de Wheatstone.

La resistencia R_x es la resistencia desconocida que se va a evaluar. El resistor R_1 es un resistor variable de referencia, de gran precisión, mientras que los resistores R_2 y R_3 son resistores fijos de refrencia. En la práctica, el puente se "equilibra" variando la resistencia R_1 hasta que la corriente que pasa por el amperímetro llega a cero. En ese caso, una sola corriente pasa por R_1 y R_2 en la rama izquierda del puente; que sea por ejemplo I_i. De igual modo, una sola corriente I_r pasa por R_x y R_3 en la rama derecha. También el potencial en los puntos P y Q debe ser el mismo, porque si no hay corriente por el amperímetro quiere decir que no hay caída de voltaje a través de él. De este modo se pueden igualar los cambios resistivos de potencial en las ramas izquierda y derecha, para las partes superior e inferior del puente:

$$I_i R_1 = I_r R_x \qquad\qquad I_i R_2 = I_r R_3 \qquad\qquad 5.9a$$

Al dividir las dos ecuaciones para eliminar I_i e I_r se ve que la relación de R_x y R_3, y y se puede despejar la resistencia desconocida:

$$\frac{I_i R_1}{I_i R_2} = \frac{I_r R_x}{I_r R_3} \qquad \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_3} \qquad \Rightarrow \quad R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2} \qquad 5.9b$$

Esta ecuación para R_x permite el cálculo de la resistencia desconocida. Una ventaja de esta técnica de puente es que no es necesario calibrar el amperímetro; sólo debe poder medir valores ceros o nulos de la corriente, y eso se puede lograr con gran exactitud. En esencia, el funcionamiento del puente de Wheatstone se fundamenta en un ajuste de la relación de resistencias en el circuito.

Actividad 5.1 **Dos fuentes y cinco resistores**

En el circuito de la figura 5.28, $R_1 = R_2 = 2.0\Omega$, , $R_3 = R_4 = 4.0\Omega$ y $V_{\varepsilon_1} = V_{\varepsilon_2} = 10V$. Se desconoce el valor de R_5. ¿Cuál es la corriente que pasa por cada resistor (Sugerencia: Use la simetría)

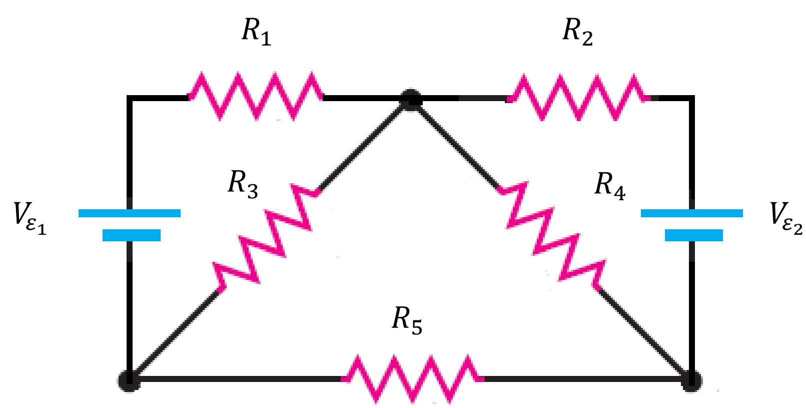


Figura 5.28 Dos fuentes de fem y cinco resistores

Actividad 5.2. **Resistores formando un cubo**

A lo largo de las aristas de un cubo hay doce resistores, cada uno con resistencia R (véase la figura 5.29). Cuál es la resistencia entre los vértices diagonalmente opuestos de este cubo? (sugerencia: se deberá calcular $R_T = {}^{\Delta V}/_{I_T}$), donde ΔVes la suma de las tres caidasde voltaje a través de cualquier trayectoria entre los vertices opuestos. Aplíquese simetría para determinar cada corriente en función de I_T.

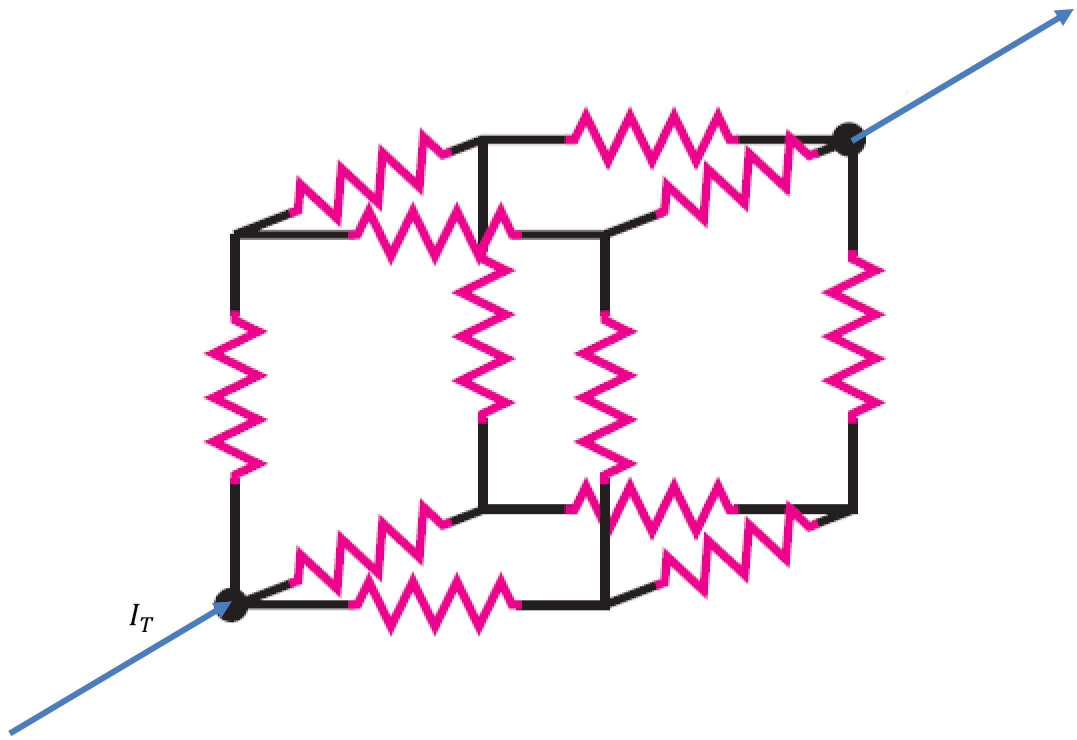


Figura 5.29 Resistencias iguales formando un cubo.

Actividad 5.3. Resistores formando un cubo

Cuál es la resistencia de una escalera infinita de resistores de 1.0Ω conectados como se muestra en la figura 5.30a? (Sugerencia: Se puede considerar que la escalera está formada por dos partes conectadas en paralelo, véase la figura 5.30b)

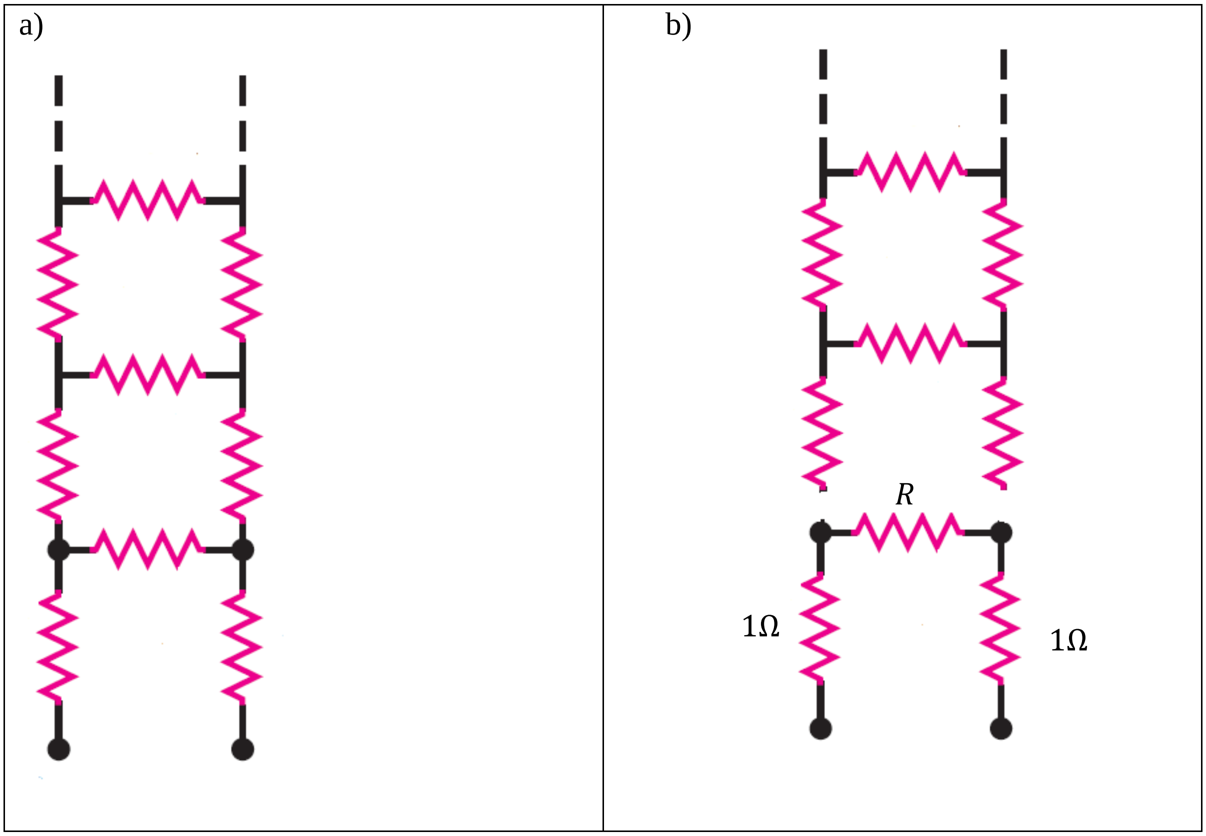


Figura 5.30 a) Una escalera infinita de resistores. Las terminales se marcan con el par de puntos. b) Se ha quitado un peldaño de la escalera