Circuitos RC

Hasta ahora sólo se han descrito corrientes constantes, independientes del tiempo. Sin embargo, las reglas Kirchhoff y los métodos para resolver circuitos que se han desarrollado en este capítulo también se aplican a corrientes dependientes del tiempo. La única restricción es que las *fem* y las corrientes en el circuito no deben variar con demasiada rapidez. (Un criterio general para aplicar las reglas de Kirchhoff es que las corrientes y las *fem* no cambien apreciablemente en un intervalo de tiempo igual al tiempo que tarda una señal luminosa en recorrer el circuito)

Proceso de carga de un capacitor

Aquí se examinará el caso sencillo de una corriente dependiente del tiempo en un circuito formado por un resistor R y un capacitor C conectados en serie y cargados por una batería. La figura 5.31 muestra un esquema de un circuito RC. Se supondrá que el condensador está descargado al principio, y que la batería se conecta repentinamente en el momento $t = 0$. Primero, la diferencia de potencial a través del capacitor es cero. Cuando se conecta la batería, pasa carga de sus terminales a las placas del capacitor. A medida que se acumula carga en la placa, la diferencia de potencial entre ellas aumenta de forma gradual. El flujo de carga se detendrá cuando la diferencia de potencial entre las placas sea igual a la *fem* de la batería. Esta descripción cualitativa del proceso de carga indica que al principio la corriente es grande, pero disminuye gradualmente hasta que al final tienda a cero.

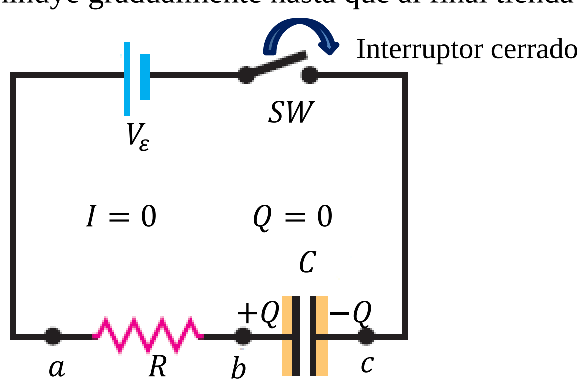

Figura 5.31 Carga de un capacitor Cuando el interruptor se cierra (en $t = 0$), la corriente pasa de cero a $\frac{V_\varepsilon}{R}$. A medida que transcurre el tiempo, Q se acerca a Q_f, y la corriente i se acerca a cero.

Para conocer el tratamiento matemático de la corriente en un circuito se usa la regla de voltaje de Kirchhoff: la suma de todas las *fem* y las caídas de voltaje en torno al circuito debe ser cero. La *fem* de la batería es V_ε. Si en algún instante la corriente es I, la caída de potencial a través del resistor es $\Delta V = -RI$. Y si la carga en las placas del capacitor en cierto instante tiene magnitud Q, la caída de potencial a través de las placas es $\Delta V_C = -Q/_C$. Por tanto

$$V_\varepsilon - RI - \frac{Q}{C} = 0 \qquad 5.28$$

En el momento inicial $Q = 0$, y entonces la ecuación (5.25) indica que la corriente inicial es $I = {}^{V_\varepsilon}/_R$. Al terminar el proceso de carga, $I = 0$ y de acuerdo con la ecuación 4.3, $Q = CV_\varepsilon$. Entonces, en el momento inicial, toda la caída de potencial está en el resistor, y al terminar el proceso de carga toda la caída de potencial está en el capacitor. En tiempos intermedios, el resistor y el capacitor contribuyen a la caída de potencial.

Recordando que

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Entonces,

$$V_\varepsilon - R\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \qquad 5.29$$

Esta ecuación se puede resolver por integración directa si se ordena de modo que un lado se proporcional a dQ y el otro se proporcional a dt, entonces

$$R\frac{dQ}{dt} = V_\varepsilon - \frac{Q}{C} = -\left(\frac{Q}{C} - V_\varepsilon\right) \qquad 5.30$$

Al dividir la ecuación (5.30) por R, resulta

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{R}\left(\frac{Q}{C} - V_\varepsilon\right) = -\frac{1}{RC}(Q - V_\varepsilon C)$$

$$\frac{dQ}{Q - V_\varepsilon C} = -\frac{1}{RC}dt \qquad 5.31$$

Ahora se integrará cada lado de la ecuación (5.31) , desde su valor inicial cero hasta el valor en cierto momento posterior a t

$$\int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_\varepsilon C} = \int_0^t -\frac{1}{RC}dt = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

La integral del lado izquierdo es el logaritmo natural, $ln(Q - V_\varepsilon)$y la del lado derecho es t.

$$ln(Q - V_\varepsilon)\Big|_0^Q = -\frac{1}{RC}t\Big|_0^t$$

$$ln(Q - V_\varepsilon) - ln(-V_\varepsilon) = -\frac{1}{RC}t$$

$$ln\frac{Q - V_\varepsilon}{-V_\varepsilon} = -\frac{1}{RC}t$$

$$\frac{Q - V_\varepsilon}{-V_\varepsilon} = e^{-\frac{1}{RC}t} \qquad \Rightarrow Q = V_\varepsilon C\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

Al despejar Q

$$Q = Q_f\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \tag{5.32}$$

Donde $V_\varepsilon C = Q_f$

La corriente instantánea I tan sólo es la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de Q

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left[Q_f\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)\right]$$

$$I = \frac{V_\varepsilon}{R}e^{-\frac{1}{RC}t} = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \tag{5.33}$$

La carga y la corriente son ambas funciones exponenciales del tiempo.

En la figura $5.32a$ y $5.32b$ la corriente y la carga del capacitor se ilustran como funciones del tiempo. En el instante en que el interruptor se cierra $(t = 0)$, la corriente pasa de cero a su valor inicial $I_0 = \frac{V_\varepsilon}{R}$; después de eso, tiende gradualmente a cero. La carga del capacitor comienza en cero y poco a poco se acerca al valor final dado por la ecuación (4.3), $Q_f = V_\varepsilon C$.

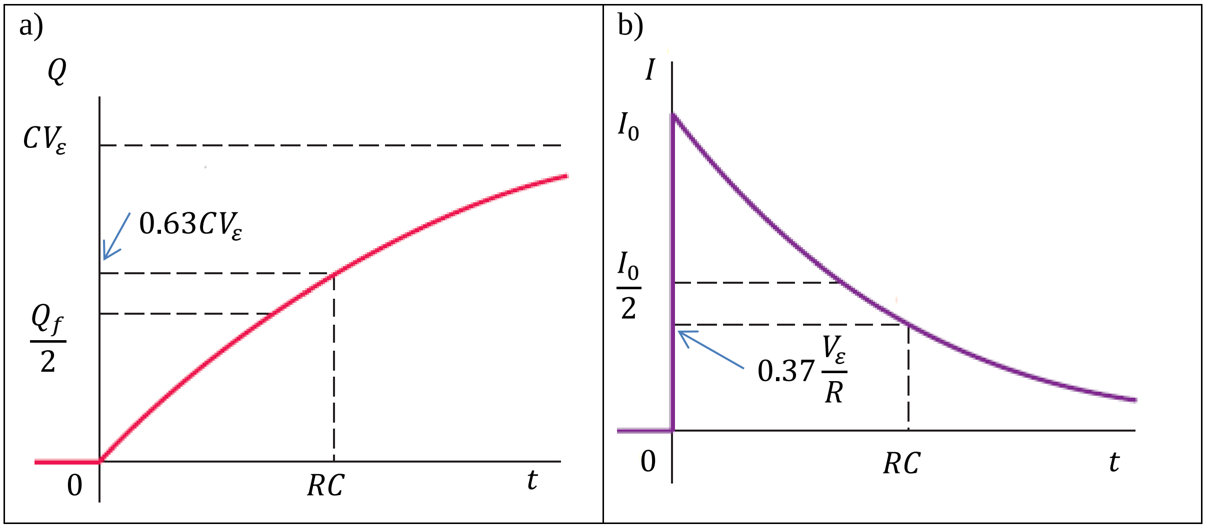

Figura 5.32 a) Carga en el capacitor del circuito RC en función del tiempo, b) Corriente en el capacitor RC en función del tiempo.

El producto RC que aparece en la exponencial tiene unidades de tiempo, y se representa por τ:

$$\tau = RC \tag{5.34}$$

Este tiempo se llama tiempo característico del circuito RC; también se llama constante de tiempo RC. En la figura $5.32a$ se ve que la mayor parte de la carga se efectúa dentro del tiempo característico. Con más precisión; en el tiempo característico $t = \tau = RC$, la carga alcanza el valor

$$Q = V_\varepsilon C(1 - e^{-1}) = V_\varepsilon C\left(1 - \frac{1}{2.718}\right) = V_\varepsilon C \times 0.63$$

esto es, en el tiempo característico la carga llega a $\approx 63\%$ de su valor final. En términos del tiempo característico la carga y la corrientes se pueden escribir como

$$Q = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad I = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \tag{5.35}$$

Ejemplo 5.10 Carga en un condensador

Suponiendo que la resistencia es $R = 8.0 * 10^3 \Omega$ en el circuito ilustrado en la figura, que la capacitancia $C = 2.0 * 10^{-6} F$ y que la fem de la batería es $V_\varepsilon = 1.5V$, ¿Cual es el valor inicial de la corriente en el instante de conectar la batería? ¿Cuál es el valor final de la carga del capacitor?¿Cuál es la carga cuando $t = \tau$? ¿Cuando $t = 2\tau$? ¿Cuando $t = 5\tau$?

Planteamiento: Es una aplicación de las ecuaciones para la carga de un condensador. Siendo la constante de tiempo del , $\tau = RC = 8.0 * 10^3\Omega \times 2.0 * 10^{-6}s = 16ms$, el cual representa el tiempo en que el condensador se ha cargado un 63% de su valor final.

Ejecutar

a) valor inicial de la corriente en el instante de conectar la batería

$$I = \frac{V_\varepsilon}{R} \qquad \Rightarrow I = \frac{1.6V}{8.0 * 10^3\Omega} \qquad \Rightarrow I = 1.9 * 10^{-4}A$$

b) valor final de la carga del capacitor

$$Q_f = CV_\varepsilon \qquad \Rightarrow Q_f = 2.0 * 10^{-6}F \times 1.5V \quad \Rightarrow Q_f = 3.0 * 10^6C$$

c) carga cuando $t = \tau$

$$Q = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \quad Q = 3.0 * 10^6C\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}\right) = 3.0 * 10^6C(1 - e^{-1})$$

$$Q = 1.9 * 10^{-6}C$$

d) carga cuando $t = 2\tau$

$$Q = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \quad Q = 3.0 * 10^6C\left(1 - e^{-\frac{2\tau}{\tau}}\right) = 3.0 * 10^6C(1 - e^{-2})$$

$$Q = 2.6 * 10^{-6}C$$

e) carga cuando $t = 5\tau$

$$Q = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \quad Q = 3.0 * 10^6C\left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right) = 3.0 * 10^6C(1 - e^{-5})$$

$$Q = 3.0 * 10^{-6}C$$

Comentarios: Después de cinco constates de tiempo, la carga se acercó a menos de 1%de su valor final.

Ejemplo 5.11 **Carga en un condensador**

Un resistor con resistencia $10M\Omega$ está conectado en serie con un capacitor cuya capacitancia es $1.0\mu F$ y una batería con fem de $12V$. Antes de cerrar el interruptor en el momento $t = 0$, el capacitor se descarga. a) ¿Cuál es la constante de tiempo? b) ¿Qué fracción de la carga final hay en las placas en el momento $t = 46\ s$? c) ¿Qué fracción de la corriente inicial permanece en $t = 46\ s$?

Planteamiento: Ésta es la misma situación que se ilustra en la figura 5.31, con $R = 10M\Omega$, $C = 1.0\mu F$ y $V_\varepsilon = 12V$. Las variables que se buscan son a) la constante de tiempo, τ, b) la carga Q en $t = 46\ s$ dividida entre la carga final Q_f y c) la corriente I en $t = 46\ s$ dividida entre la corriente inicial I_0.

Ejecutar:

a) Constante de tiempo

$$\tau = RC$$

$$\tau = 10 * 10^6 \Omega \times 1.0 * 10^{-6} F \quad \Rightarrow \quad \tau = 10\ s$$

b) Fracción de la carga final hay en las placas en el momento $t = 46\ s$

De acuerdo a la ecuación (5.32)

$$Q = Q_f \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \quad \Rightarrow \frac{Q}{Q_f} = 1 - e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$\frac{Q}{Q_f} = 1 - e^{-\frac{1}{10}46} \quad \Rightarrow \frac{Q}{Q_f} = 0.99$$

El capacitor está cargado al 99% después de un tiempo igual a $4.6RC$, o 4.6 constantes de tiempo.

c) Fracción de la corriente inicial permanece en $t = 46\ s$
De acuerdo a la ecuación (5.33)

$$I = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \quad \Rightarrow \frac{I}{I_0} = e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\frac{1}{10}46} \qquad \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 0.010$$

Después de 4.6 constantes de tiempo, la corriente ha disminuido al 1.0% de su valor inicial.

Descarga en un capacitor

Una vez terminado el proceso de carga, y que se ha detenido la corriente en el circuito, se puede desconectar la batería. Entonces la carga permanecerá en las placas del capacitor (excepto por una fuga lenta a través del capacitor o el aire). Sin embargo se puede suponer que se conecta ahora las terminales del capacitor con las del resistor, como se ve en la figura 5.33. Entonces, el capacitor se descargará a través de resistor. La corriente será grande en el momento inicial, y en forma gradual se nivelará y tenderá a cero a medida que decrezca la diferencia d potencial a través del capacitor. Con un análisis similar, usando la regla de voltaje de Kirchhoff y con integración directa, se llegan a las ecuaciones que describen la descarga en el capacitor.

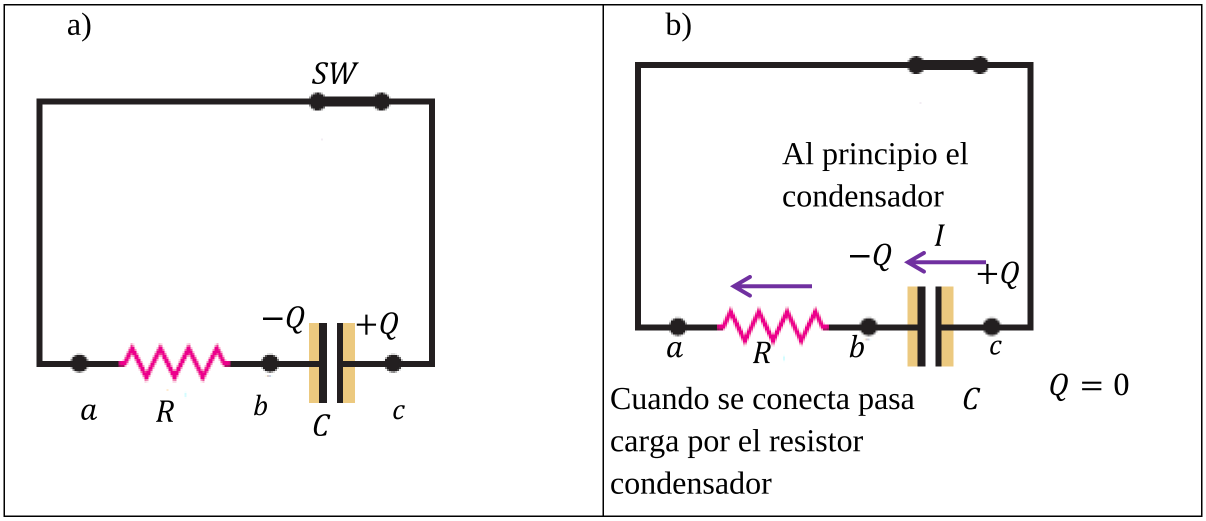

Figura 5.33 Descarga de un capacitor, ahora el interruptor (SW) se abre.

Abrir el interruptor (SW), equivale a hacer cero, V_ε en la ecuación (5.28), resultando

$$-R\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \tag{5.33}$$

$$-R\frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}$$

Organizando términos

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}dt \tag{5.34}$$

Integrando la ecuación (5.34)

$$\int_{Q_0}^{q} \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}\int_{0}^{t} dt$$

$$q = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \tag{5.35}$$

La corriente instantánea I es la derivada de ésta con respecto al tiempo

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

Ahora la corriente es la inversa de la razón de cambio, porque durante el proceso de descarga, hay una disminución de carga, que da como resultado una corriente positiva

$$I = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad \Rightarrow I = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \tag{5.36}$$

la constante de tiempo para el caso del proceso de descarga, es

$$q = Q_0 e^{-1} \quad \Rightarrow q = \frac{Q_0}{e} \tag{5.37}$$

esto es, en el tiempo característico la carga ha disminuido a ≈ 37% de su valor inicial.

En la figura $5.34a$ y $5.34b$, se muestra el comportamiento dela carga q y la corriente I para el proceso de descarga de un condensador en función del tiempo, respectivamente.

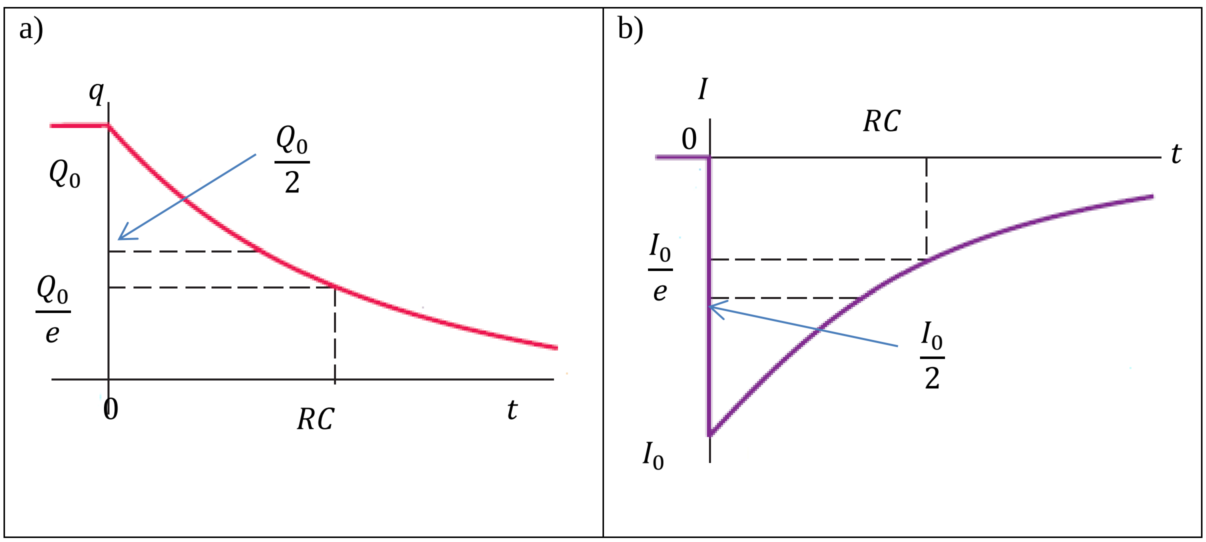

Figura 5.34 Capacitor en un proceso de descarga. a) La carga q, b) la corriente I. En función del tiempo

Ejemplo 5.12 **Descarga en un condensador**

El resistor y el capacitor descritos en el ejemplo 5.11 se reconectan como se ilustra en la figura $5.33a$. Originalmente, se da al capacitor una carga de $5.0\mu C$ y luego se descarga al cerrar el interruptor en $t = 0$. a) ¿En qué momento la carga será igual a $0.50\mu C$? b) ¿Cuál es la corriente en ese momento?

Planteamiento: Ésta es la misma situación que se ilustra en la figura $5.33b$, con $R = 10M\Omega$, $C = 1.0\mu F$. Las variables que se buscan son a) el valor de t en el que $q = 0.50\mu C$ y b) el valor de I en ese momento.

Ejecutar:

a) El valor de t en el que $Q = 0.50\mu C$

De acuerdo a la ecuación (5.35)

$$q = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \Rightarrow \frac{q}{Q_0} = e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Despejando t, resulta

$$ln\left(\frac{q}{Q_0}\right) = ln\left(e^{-\frac{1}{RC}t}\right) = -\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow t = -RC\ ln\left(\frac{q}{Q_0}\right)$$

Sustituyendo los valores

$$t = 10 * 10^6\Omega \times 1.0 * 10^{-6}F\ ln\left(\frac{0.5\mu C}{5.0\mu C}\right) \Rightarrow t = 23\ s$$

Esto es 2.3 veces la constante de tiempo $\tau = RC = 10\ s$.

b) El valor de I en ese momento.

De acuerdo a la ecuación (5.36)

$$I = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \quad \Rightarrow I = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$I = \frac{5.0 * 10^{-6}C}{10s} e^{-\frac{1}{10}23} \quad \Rightarrow I = 5.8 * 10^{-8}A$$

Ejemplo 5.13 El circuito convertible

En el circuito de la figura $5.35a$, el interruptor SW ha estado en la posición $\boxed{2}$ durante largo tiempo. a) Cuando $t = 0$, se cambia a la posición $\boxed{1}$ (Figura$5.35b$). ¿Cuál es la carga en el capacitor, en función del tiempo t? b) Mucho tiempo después, en algún momento t', el interruptor regresa a la posición $\boxed{2}$ (Figura$5.23c$). ¿Cuál es la carga en el capacitor en función del tiempo t'? Cual es e voltaje a través del resistor R_2 en función del tiempo t'?

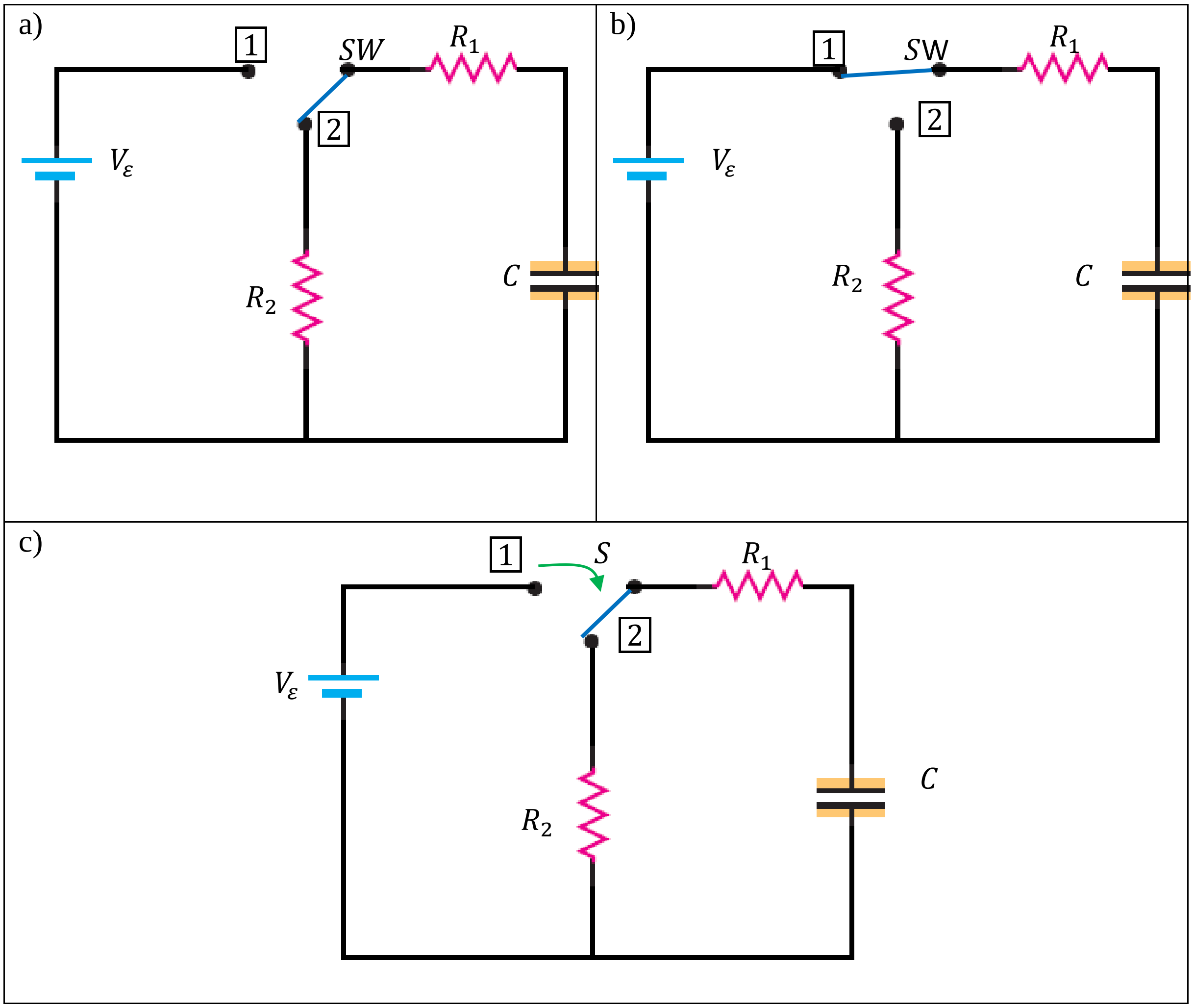

Figura 5.35 Circuito RC convertible.

Planteamiento:

Solución:

a) Como el interruptor ha estado en la posición $\boxed{2}$ durante mucho tiempo, el condensador está descargado. Cuando el interruptor pasa a la posición $\boxed{1}$, la corriente solo pasa por el circuito exterior (Figura 5.35b), por R_1, el capacitor C se carga hasta su valor final $Q = CV_\varepsilon$ igual que la descripción anterior de la carga de un circuito RC. Entonces, el tiempo característico relevante es $\tau = R_1C$, y la carga en el capacitor se define por la ecuación:

$$Q = CV_\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1C}}\right)$$

Con $R = R_1$

b) Mucho tiempo después, cuando $t \gg R_1C$, el interruptor pasa a la posición $\boxed{2}$. Sea el nuevo tiempo inicial $t' = 0$. El condensador está cargado inicialmente con

$Q = CV_\varepsilon$. Como la *fem* está ahora realmente desconectada, la descarga sólo se hace en la malla derecha (Figura$5.35c$) y la corriente pasa en dirección contraria a la de las manecillas del reloj por la combinación de resistores en serie, y ahora la resistencia equivalente es $R = R_1 + R_2$. Entonces, la carga en el capacitor será una función de t' con

$$Q = CV_\varepsilon e^{-\frac{t}{RC}} = CV_\varepsilon e^{-\frac{t'}{(R_1+R_2)C}}$$

Como se dijo, la corriente tiene dirección contraria a la de las manecillas del reloj en la malla derecha, y su magnitud es:

$$I = \frac{V_\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I = \frac{V_\varepsilon}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t'}{(R_1+R_2)C}}$$

y el voltaje a través de R_2 se calcula con la relación de Ohm,

$$\Delta V = IR_2 \quad \Rightarrow \Delta V = \left(\frac{V_\varepsilon}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t'}{(R_1+R_2)C}}\right) R_2$$